

EQUATION DIFFERENTIELLE

I Rappel

L'équation différentielle $y' = y$ (ou $f' = f$) admet sur $\mathbb{R}$ une seule fonction f solution unique telle que $f(0) = 1$ la fonction $x \rightarrow \exp(x)$

II Résolution de $y' = ay$ avec $a \in \mathbb{R}$ donné $\neq 0$

Théorème :

L'équation différentielle $y' = ay$ avec a constante non nulle admet pour solution les fonctions f dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par $f(x) = C.e^{ax}$ où C est une constante réelle quelconque. Ce sont les seules solutions.

1) les fonctions $x \rightarrow Ce^{ax}$ solutions de $y' = ay$

$f(x) = Ce^{ax}$ ($x \rightarrow e^{ax}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc f aussi)

$$f'(x) = a * C * e^{ax}$$

Donc $f'(x) = a * f(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$

$$af(x) = a * C * e^{ax}$$

Donc $f' = af$

Donc f est solution de $y' = ay$.

2) Ce sont les seules :

Soit f une solution de $y' = ay$

g une autre solution de $y' = ay$ avec $g(x) = f(x) * e^{-ax}$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ $x \rightarrow e^{-ax}$ aussi $\rightarrow$ donc les produits aussi.

Pour tout x de $\mathbb{R}$

$$g'(x) = f'(x).e^{-ax} + f(x).(-a).e^{-ax}$$

$$= e^{-ax} [f'(x) - a.f(x)]$$

0 car f est solution de $y' = ay$

$g'(x) = 0$ donc g est constante donc $C = f(x).e^{-ax}$ donc **$f(x) = C.e^{ax}$**

Remarque : Si on impose une condition initiale telle que $f(x_0) = y_0$ (par ex : $f(0) = 1$), il n'y a qu'une solution de l'équation $y' = ay$.

Applications : voir cours papier + exos 20 à 23 p 106

III Résolution de l'équation différentielle $y' = ay + b$, a et b réels non nuls

Théorème :

L'équation $y' = ay + b$ a pour solution les fonctions g définies par $g(x) = f(x) - b/a$ où f est une solution de l'équation différentielle $y' = ay$

Explications : voir cours papier.

Propriété :

Si on impose une condition initiale $g(x_0) = y_0$ où x_0 et y_0 sont deux constantes appartenant à $\mathbb{R}$ données,

l'équation : $y' = ay + b$ n'admet qu'une solution de la forme **$g(x) = C.e^{ax} - b/a$** . C étant déterminée grâce à la condition imposée.