PRODUIT SCALAIRE DANS LE PLAN

I Définition

1) Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls

A, B, C tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$

Le produit scalaire de $\vec{u}$ par $\vec{v}$ est définit pas :

$$\vec{u}\,.\,\vec{v} = \overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC}$$

$$= AB * AC * \cos(BAC)$$

$$\vec{u}\,.\,\vec{v} = \left\|\vec{u}\right\| * \left\|\vec{v}\right\| * \cos(\vec{u}\,.\,\vec{v})$$

2) Si l'un des vecteurs est nul

$$\vec{u}\,.\,\vec{0} = 0.\vec{v} = 0$$

Exemples : (+ voir cours papier)

$\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = 7$ et $\left\|\overrightarrow{AC}\right\| = 3$

$$BAC = \frac{\pi}{6}$$

$$\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC} = 7*3*\cos\frac{\pi}{6} = \frac{21\sqrt{3}}{2}$$

Remarque : Si l'angle BAC est aigu, le produit scalaire est positif, si BAC est obtus, le produit scalaire est négatif, si les vecteurs sont colinéaires, le produit scalaire est égale à 1 ou -1 (si même sens ou sens contraire)

II Vecteurs orthogonaux

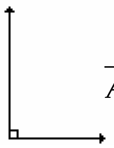
Lorsque l'un des deux vecteurs est nul ou lorsque les deux vecteurs ont des directions perpendiculaires, on a

$\cos(\vec{u}\,.\,\vec{v}) = 0$ et $\vec{u}\,.\,\vec{v} = 0$

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont appelés vecteurs orthogonaux.

Remarque : $\vec{0}$ est orthogonal à tous les autres vecteurs

On peut avoir $\vec{u}\,.\,\vec{v} = 0$ avec deux vecteurs non nul.



$$\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC} = 0$$

III Produit scalaires et opérations

Quelque soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ et tout réel a :

$a)\ \vec{u}\,.\,\vec{v} = \vec{v}\,.\,\vec{u}$

$b)\ \vec{u}.(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}\,.\,\vec{v} + \vec{u}\,.\,\vec{w}$

$c)\ (\alpha\vec{u}).\vec{v} = \vec{u}.(\alpha\vec{v}) = \alpha(\vec{u}\,.\,\vec{v})$

$d)\ (\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2(\vec{u}\,.\,\vec{v}) + \vec{v}^2 = \left\|\vec{u}\right\|^2 + 2(\vec{u}\,.\,\vec{v}) + \left\|\vec{v}\right\|^2 = \left\|\vec{u} + \vec{v}\right\|^2$

$e)\ (\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2(\vec{u}\,.\,\vec{v}) + \vec{v}^2 = \left\|\vec{u}\right\|^2 - 2(\vec{u}\,.\,\vec{v}) + \left\|\vec{v}\right\|^2 = \left\|\vec{u} - \vec{v}\right\|^2$

$f)\ (\vec{u} + \vec{v}).(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2 = \left\|\vec{u}\right\|^2 - \left\|\vec{v}\right\|^2$

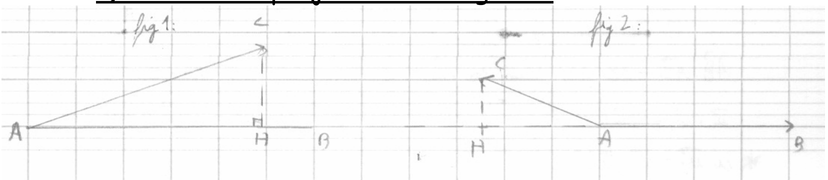
ATTENTION :

$$\left\|\vec{u} + \vec{v}\right\| \neq \left\|\vec{u}\right\| + \left\|\vec{v}\right\|$$

$$\left\|\vec{u} - \vec{v}\right\| \neq \left\|\vec{u}\right\| - \left\|\vec{v}\right\|$$

IV Autres écritures du produit scalaire

1) Utilisant la projection orthogonale



H est le projeté orthogonal de C sur (AB)

$\overrightarrow{AH}$ est la projection orthogonale de $\overrightarrow{AC}$ sur (AB)

Cas n°1 :

$$\cos(BAC) = \frac{AH}{AC} \qquad AH = AC * \cos(BAC)$$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB * AC * \cos BAC$$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB * AH$$

Cas n°2 :

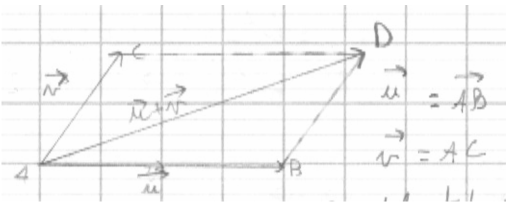
$$\cos(BAC) = -\cos CAH = -\frac{AH}{AC}$$

L'angle BAC est obtus.

$$AH = -AC * \cos BAC$$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -AB * AH$$

2) Utilisant les normes



D est le point tel que ABDC soit un parallélogramme

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \vec{u} + \vec{v}$$

$$\left\|\overrightarrow{AD}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right\|^2$$

$$= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})^2$$

$$= \overrightarrow{AB}^2 + 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}^2$$

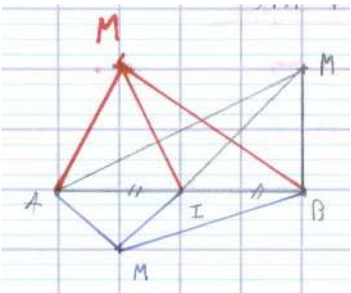
$$\left\|\vec{u} + \vec{v}\right\|^2 = \left\|\vec{u}\right\|^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \left\|\vec{v}\right\|^2$$

$$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}[\left\|\vec{u} + \vec{v}\right\|^2 - \left\|\vec{u}\right\|^2 - \left\|\vec{v}\right\|^2]$$

IV Théorème de la médiane

Soit [AB] un segment de milieu I pour tout M du plan

$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2}.AB^2$



$$\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}$$

$$\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IA} \text{ (car } \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB})$$

$$\overrightarrow{MA}^2 = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 = \overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IA}^2$$

$$\overrightarrow{MB}^2 = (\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IA})^2 = \overrightarrow{MI}^2 - 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IA}^2$$

$$\overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 = 2\overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{IA}^2$$

$$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + 2IA^2 \text{ or } IA = 1/2AB$$

$$IA^2 = 1/4AB^2$$

$$2IA^2 = 1/2AB^2$$

$$d'où \quad MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + 1/2AB^2$$

VI Relation métrique dans le triangle

1) Théorème d'Al Kashi

Dans le triangle ABC :

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos \hat{A}$

$a^2 = BC^2 = \overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})^2$

$= \overrightarrow{BA}^2 + 2\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}^2$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = c.b.\cos(BAC)$

$= c.b.\cos(\hat{A})$

Or : $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -AB * AC * \cos(B\hat{A}C) = -c * b * \cos \hat{A}$

D'où : $a^2 = c^2 + b^2 - 2bc \cos \hat{A}$

2) Dans un triangle ABC

$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ Si le triangle a une aire S :

S = 1/2b.c.sin$\hat{A}$

VII Produit scalaire et coordonnées

$(O;\vec{i};\vec{j})$ orthonormal

$\vec{i}$ et $\vec{j}$ orthogonaux et de même norme égale à 1.

$\vec{i}.\vec{j} = \vec{j}.\vec{i} = 0$ $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$

1) Expressions de $\vec{u}.\vec{v}$

voir démonstration dans le cours papier

→ $\boxed{\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy'}$

2) Conséquences :

(1) Le carré scalaire :

$\vec{u}^2 = x^2 + y^2$

(2) La norme de $\vec{u}$:

$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2}$

(3) La distance AB :

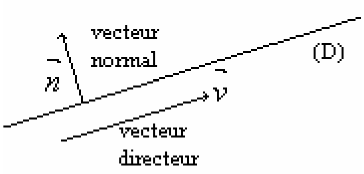
$A(x_A;y_A)$; $B(x_B;y_B)$ → $AB = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$

$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A)$

VIII Application du produit scalaire

1) Equation d'une droite définit par un point et un vecteur normal

Définition : Un vecteur $\vec{n}$ est normal à une droite (D) s'il est non nul et orthogonal à un vecteur directeur de (D)



Cas général :

$(O\vec{i},\vec{j})$ orthonormal

$A(x_0;y_0)$ $\vec{n}(a;b)$

(D) est la droite qui passe par A de vecteur normal $\vec{n}$

$M(x;y)$ $\overrightarrow{AM}(x-x_0;y-y_0)$

M(x ; y) ∈ (D) ⇔ $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux

⇔ $\overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$

⇔ $a(x-x_0) + b(y - y_0) = 0$
⇔ $ax + by + (-a.x_0 - b.y_0) = 0$ avec $(-a.x_0 - b.y_0) = c$
⇔ $ax + by + c = 0$

Propriétés :

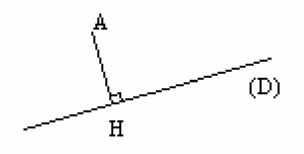
- une droite (D) de vecteur normal $\vec{n}$ (a ; b) admet une équation de la forme ax + by + c = 0
- Réciproquement : toute équation de la forme ax + by + c = 0 (avec (a ; b) ≠ (0 ; 0) est l'équation d'une droite de vecteur normal $\vec{n}$ (a : b)

Exos : voir cours papier

2) distance d'un point à une droite (cf. p 300)

Soit (D) une droite de vecteur normal $\vec{n}$ (a : b).
Soit $A(x_A ; y_A)$ un point extérieur à (D). alors la distance A à (D) est égale à :

$$\boxed{\frac{|ax_A+by_A+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}}$$



La distance de A à (D) est AH, H étant le projeté orthogonal de A sur (D).

3) Equation d'un cercle

Rappel : un cercle de centre Ω (a ; b) et de rayon R a pour équation : **$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$**

Equation d'un cercle de diamètre [AB] :
Soit *C* le cercle de diamètre [AB] :
M(x ; y) ∈ *C* ⇔ AMB est rectangle en M
⇔ $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ sont orthogonaux
⇔ $\overrightarrow{MA}\overrightarrow{MB}=0$