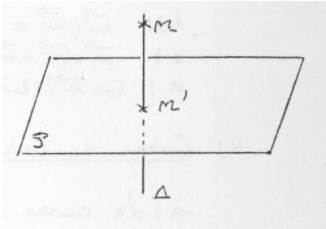
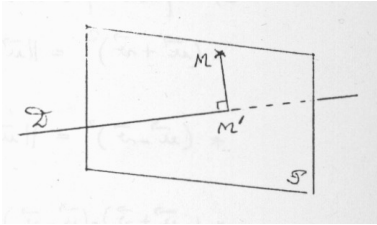
PRODUIT SCALAIRE DANS L'ESPACE

I Projection orthogonale dans l'espace



1) Projection orthogonale sur un plan

Définition : P est un plan de l'espace M est un point de l'espace. Il existe une droite Δ et une seule qui passe par M et qui est perpendiculaire à P. Le point d'intersection M' de Δ et de P s'appelle <u>projection orthogonale de M sur le plan P</u>.



2) Projection orthogonale sur une droite

Définition : D est une droite de l'espace, M est un point de l'espace. Il existe un Plan P et un seul qui contient M et qui est perpendiculaire à D. Le point d'intersection M' de P et D s'appelle projection orthogonale de M sur le droite D.

II Produit scalaire dans l'espace

1) Définition

- Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace.
- Soient A, B, C trois point de l'espace tels que $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$ et $\overrightarrow{AC}=\vec{v}$.
- $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont coplanaires (il existe au moins un plan qui contient A, B, et C) et le produit scalaire $\vec{u}.\vec{v}$ est égal au produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ défini dans le plan contenant A, B, C.

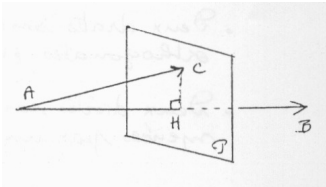
2) Expression du produit scalaire

Le produit scalaire $\vec{u}.\vec{v}$ est indépendant des représentants de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$.

Avec $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$:

a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB*AC*\cos BAC$

$\vec{u}.\vec{v}=\|\vec{u}\|*\|\vec{v}\|*\cos(\vec{u};\vec{v})$



b) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB*AH$ où H est la projection orthogonale de C sur la droite (AB).

c) Avec $\vec{u}$ (x ; y ; z) et $\vec{v}$ (x' ; y' ; z') en repère orthonormal $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ on a :

$\boxed{\vec{u}.\vec{v}=xx'+yy'+zz'}$

3) Propriété du produit scalaire

Quels que soient les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$:

a) $\vec{0}.\vec{u}=\vec{u}.\vec{0}=0$

b) $\vec{u}.\vec{v}=\vec{v}.\vec{u}$

c) $\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}.\vec{v}+\vec{u}.\vec{w}$

d) $(a\vec{u}).(b\vec{v})=a*b*(\vec{u}.\vec{v})$ pour tout les réels a et b

4) Carré scalaire et norme :

a) Le carré scalaire de $\vec{u}$ est $\vec{u}.\vec{u}=\vec{u}^2$. La norme de $\vec{u}$ est $\|\vec{u}\|=\sqrt{\vec{u}.\vec{u}}$.

Si $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$, alors : $\|\vec{u}\|=\|\overrightarrow{AB}\|=AB=\sqrt{AB^2}=\sqrt{\overrightarrow{AB}^2}$

b) Quels que soient les réels $\vec{u}$ et $\vec{v}$

¤ $(\vec{u}+\vec{v})^2=\|\vec{u}+\vec{v}\|^2=\vec{u}^2+2\vec{u}.\vec{v}+\vec{v}^2=\|\vec{u}\|^2+2\vec{u}.\vec{v}+\|\vec{v}\|^2$

¤ $(\vec{u}-\vec{v})^2=\|\vec{u}-\vec{v}\|^2=\vec{u}^2-2\vec{u}.\vec{v}+\vec{v}^2=\|\vec{u}\|^2-2\vec{u}.\vec{v}+\|\vec{v}\|^2$

¤ $(\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}-\vec{v})=\vec{u}^2-\vec{v}^2=\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2$

c) Avec $\vec{u}$ (x;y;z) en repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$

$\|\vec{u}\|^2 = x^2 + y^2 + z^2$

$\overrightarrow{AB}^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2$; $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$

III Orthogonalité dans l'espace

1) Vecteurs orthogonaux

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace sont orthogonaux lorsque leur produit scalaire est égal à zéro

Remarque : $\vec{0}$ est orthogonal à tous les vecteurs de l'espace

2) Droites orthogonales

Deux droites D et D' de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ sont orthogonales SSI $\vec{u}.\vec{u}' = 0$

Deux droites (AB) et (CD) sont orthogonales SSI $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = 0$ (avec $\overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$ et $\overrightarrow{CD} \neq \vec{0}$)

Deux droites sont perpendiculaires SSI elles sont orthogonales et sécantes.

Deux droites sont orthogonales si leurs parallèles respectives menées par un point donné sont perpendiculaires.

3) Droite orthogonale à un plan

Propriété : D est une droite de vecteur directeur $\vec{n}$. P est un plan de l'espace.

D est orthogonale à P SSI $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs (directeurs) non colinéaires de P. Le vecteur $\vec{n}$ est appelé vecteur normal à P.

Conséquences : Une droite orthogonale à deux droites sécantes de P est une droite orthogonale à P.

4) Plans perpendiculaires

Soit P un plan de vecteur normal $\vec{n}$ et P' un plan de vecteur normal $\vec{n}'$.

P et P' sont perpendiculaires SSI $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont orthogonaux.

IV Applications

1) Equation d'un plan de l'espace

Propriété : soit $\vec{n}$ un vecteur non nul et A un point de l'espace.

- Le plan P contenant A et orthogonal à $\vec{n}$ est l'ensemble des point M tels que $\overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$
- Dans un repère orthonormal $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$, si $\vec{n}$ a pour coordonnées (a ; b ; c), le plan P admet une équation de la forme : **ax + by + cz +d = 0**
- Réciproquement, toute équation de la forme ax + by + cz +d = 0 avec (a ; b ; c) ≠ (0 ; 0 ; 0) est une équation d'un plan de vecteur normal $\vec{n}$ (a ; b ; c).

2) Caractérisation d'un demi-espace

P est un plan d'équation ax + by + cz +d = 0. P délimite deux demi-espaces de frontière P :

- l'un est l'ensemble des point M (x ; y ; z) tels que ax + by + cz +d ≥ 0.
- l'autre est l'ensemble des points M (x ; y ; z) tels que ax + by + cz +d ≤ 0.

3) Distance d'un point à un plan

Soit P un plan d'équation ax + by + cz +d = 0 dans un repère orthonormal et $n_0(x_0;y_0;z_0)$ un point de l'espace.

La distance du point n_0 au plan P est égale à :

$$\frac{|a.x_0 + b.y_0 + c.z_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

4) Sphère de l'espace

Définition : La sphère de centre Ω et de rayon R est l'ensemble des points M tels ΩM = R

Propriété : a) Dans un repère orthogonal $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ on note (α ; β ; γ) les coordonnées de Ω et (x ; y ; z) les coordonnées de M. La sphère de centre Ω et de rayon R a pour équation :

$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2 = R^2$

b) La sphère de diamètre [AB] est l'ensemble des point M tels que : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$