NOMBRE COMPLEXE ET GEOMETRIE

I Ecriture trigonométrique d'un nombre complexe

1) Module d'un nombre complexe

a) définition :

soit z = x + iy avec x et y réels ; le module de z, noté $|z|$ est le nombre réel positif $\sqrt{x^2+y^2}$:

$|z| = |x+iy| = \sqrt{x^2+y^2}$

$|z|^2 = x^2+y^2$

Remarque : $|z|^2 = z.\bar{z}$

$|z| = \sqrt{z.\bar{z}}$

Exemples :

$|3+2i| = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$

$|-i+i| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$|-2+3i| = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$

$|-\sqrt{2}-i\sqrt{2}| = \sqrt{2+2} = 2$

$|-3i| = \sqrt{9} = 3$

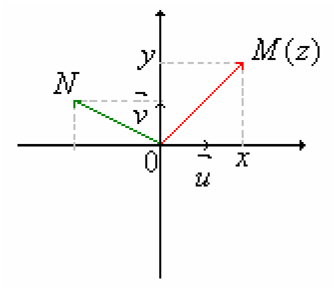
$|-4| = \sqrt{16} = 4$

$|5| = \sqrt{25} = 5$

$|0| = \sqrt{0} = 0$

Remarque :
Si z est réel, le module de z coïncide avec la valeur de valeur absolue.
Deux complexes distincts peuvent avoir le même module.

b) Interprétation géométrique du module :



Si z = x + iy (x et y réel) est l'affixe d'un point M et du vecteur $\overrightarrow{OM}$, alors :

$|z| = OM = \|\overrightarrow{OM}\|$

c) Propriété des modules :

$|z| \geq 0$ pout tout z de C

$|z|$ est un réel positif

$|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$

$|z| = |-z| = |\bar{z}| = \sqrt{z.\bar{z}}$

quelque soient z et z'

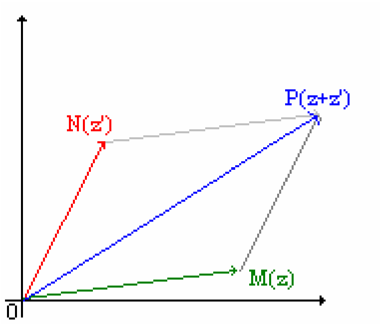
$|z.z'| = |z|.|z'|$

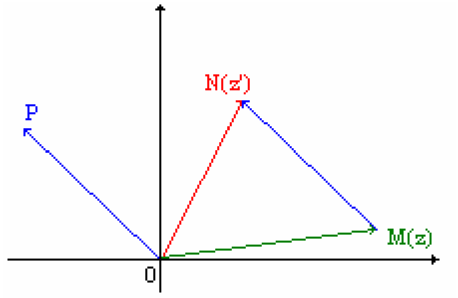
$\left|\frac{1}{z'}\right| = \frac{1}{|z'|}$ avec $z' \neq 0$

$\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$

$|z^n| = |z|^n, n \in Z$

$|z+z'| \leq |z| + |z'|$





P tel que : $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{MN}$

L'affixe de $\overrightarrow{OP}$ est égale à l'affixe de $\overrightarrow{MN}$, c'est-à-dire (z'-z)

Donc OP = MN = $|z - z'|$

$\left\|\overrightarrow{MN}\right\| = |z - z'|$

Exercice :

1 calculer le module de :

$$z_1 = \frac{1+i}{1-i} \rightarrow \left|\frac{1+i}{1-i}\right| = \frac{|1+i|}{|1-i|} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$$

$$z_2 = \frac{(2+3i)(1-5i)}{(4+i\sqrt{10})(\sqrt{12}-i)} \rightarrow |z_2| = \frac{|(2+3i)(1-5i)|}{|(4+i\sqrt{10})(\sqrt{12}-i)|} = \frac{\sqrt{13}\times\sqrt{26}}{\sqrt{26}\times\sqrt{13}} = 1$$

$$z_3 = (2+i)^7 \rightarrow |z_3| = |2+i|^7 = (\sqrt{5})^7$$

$$z_4 = \left(\frac{3-2i}{1+i}\right)^5 \rightarrow |z_4| = \left(\frac{|3-2i|}{|1+i|}\right)^5 = \left(\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{2}}\right)^5 = \left(\sqrt{\frac{13}{2}}\right)^5$$

$$z_5 = 1+\sin\alpha + i\cos\alpha \rightarrow |z_5| = |(1+\sin\alpha)+i\cos\alpha| = \sqrt{(1+\cos\alpha)^2+\cos^2\alpha} = \sqrt{1+2\sin\alpha+1} = \sqrt{2+2\sin\alpha}$$

d) Recherche d'un ensemble de points :

Exemple : soit A d'affixe z_A = 3 - 2i et B d'affixe z_B = 1 + i

Déterminer l'ensemble des point M d'affixe z tel que : $|z-3+2i| = |z-1-i|$

Déterminer l'ensemble des point M d'affixe z tel que : $|z-1-i| = 4$

$$|z-3+2i| = |z-(3-2i)|$$
$$= |z - z_A| = \left\|\overrightarrow{AM}\right\| = AM$$
$$|z-1-i| = |z-(1+i)|$$
$$= |z - z_B| = \left\|\overrightarrow{BM}\right\| = BM$$

$|z-3+2i| = |z-1-i|$ ⇔ AM = BM

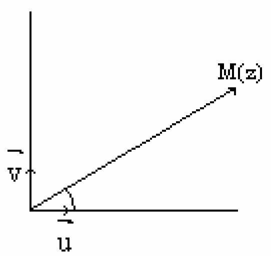
⇨ L'ensemble des points M cherchés est la médiatrice de [AB]

$|z-1-i| = 4$ ⇔ BM = 4

l'ensemble des point M cherché est le cercle de centre B et de rayon R = 4.

2) Argument d'un nombre complexe

a) Définition :



Dans $(O;\vec{u};\vec{v})$ orthonormal

Soit z un nombre complexe non nul OM le vecteur d'affixe. Un argument de z est une mesure en radian de l'angle orienté $(\vec{u};\overrightarrow{OM})$

Remarque : 0 n'a pas d'argument

Un argument est défini à $k\times 2\pi$ près $k \in Z$

On note arg(z) = $\theta + k\times 2\pi$ ($k\in Z$)

Si θ est une mesure de $(\vec{u};\overrightarrow{OM})$

b) cas particulier :

1) Si z est réel strictement positif

arg(z) = $0+k\times 2\pi$, $k\in Z$

2) Si z est réel strictement négatif

arg(z) = $\pi+k\times 2\pi$, $k\in Z$

3) Si z est réel

arg(z) = $0+k\times\pi$, $k\in Z$

4) Si z est imaginaire pur avec Im(z) > 0

arg(z) = $\frac{\pi}{2}+k\times 2\pi$, $k\in Z$

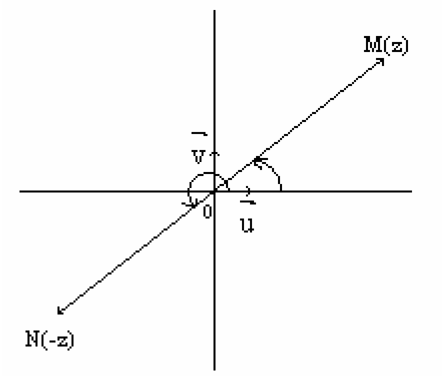
5) Si z est imaginaire pur avec Im(z) < 0

arg(z) = $-\frac{\pi}{2}+k\times 2\pi$, $k\in Z$

6) Si z est imaginaire pur

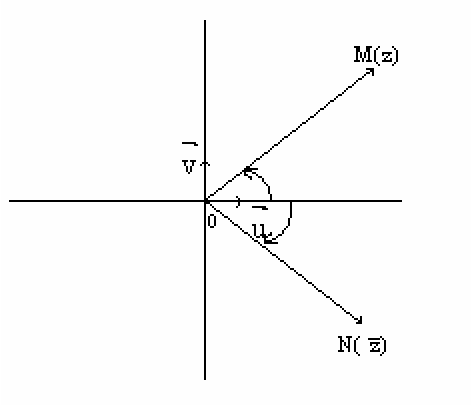
arg(z) = $\frac{\pi}{2}+k\times\pi$, $k\in Z$

c) Argument de 2 complexes opposés :



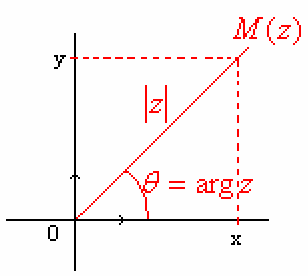
$$\arg(-z)=\arg(z+\pi)\ \ (k\times 2\pi, k\in Z)$$

d) Argument de deux complexes conjugués :



$$\arg(\bar{z})=-\arg(z+\pi)\ \ (k\times 2\pi, k\in Z)$$

<u>3) Ecriture trigonométrique d'un nombre complexe</u>



Soit z = x + iy , x et y réels, l'affixe de M de $\overrightarrow{OM}$:

$|z| = OM = \|\overrightarrow{OM}\| = \sqrt{x^2+y^2}$

$(\vec{u}\,;\vec{v}) = \theta = \arg(z)$ à 2π près

$$x = |z|\cos\theta$$
$$y = |z|\sin\theta$$

$|z|$ et θ sont les coordonnées polaires de M

$z = |z|\cos\theta + i.|z|\sin\theta$

$\Rightarrow z = |z|(\cos\theta + i.\sin\theta)$

a) définition : soit z un complexe non nul de module $|z|$ et d'argument θ. Alors :

$\boxed{z = |z|(\cos\theta + i.\sin\theta)}$ s'appelle l'écriture trigonométrique.

$x = \lvert z\rvert\cos\theta$ $y = \lvert z\rvert\sin\theta$	$\lvert z\rvert = \sqrt{x^2+y^2}$ $\cos\theta = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ $\sin\theta = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

b) exemples :

$z = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$

$|z| = |2| \times \left|\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right|$

$|z| = 2$

$\theta = \frac{\pi}{3}[2\pi]$

$z = 2\cos\theta + 2i\sin\theta = 1 + i\sqrt{3}$

$z = \sqrt{2} - i\sqrt{3}$

$|z| = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2} = 2$

$\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin\theta = \frac{-\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{4}$

$z = 2(\cos-\frac{\pi}{4} + i\sin-\frac{\pi}{4})$

$z = -3(\sin\frac{\pi}{6} + i\cos\frac{\pi}{6})$

$z = 3(-\sin\frac{\pi}{6} - i\cos\frac{\pi}{6})$

$\neq \cos\theta + i\sin\theta$

$z = -3.\sin\frac{\pi}{6} + (-3).i\cos\frac{\pi}{6}$

$z = \frac{-3}{2} - 3i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$|z| = 3$; $z = 3(\frac{-1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2})$

$\cos\theta = \frac{-1}{2}$

$\sin\theta = \frac{-\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow \theta = \frac{-2\pi}{3}$

$z = 3(\cos\frac{-2\pi}{3} + i\sin\frac{-2\pi}{3})$

$z = 2(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3})$

$|z| = 2$

$\cos\theta = \cos\frac{\pi}{3}$

$\sin\theta = -\sin\frac{\pi}{3}$

$\theta = -\frac{\pi}{3}[2\pi]$

$z = 2[\cos(-\frac{\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{3})]$

c) Propriétés :

Deux nombres complexes z et z' (non nuls) sont égaux SSI ils ont :

- le même module
- le même argument à $2k\pi$ près, $k \in Z$

$z = z' \Leftrightarrow |z| = |z'|$

$\arg(z) = \arg(z') + 2k\pi, k \in Z$

Tout nombre complexe écrit sous la forme $\cos\theta + i\sin\theta$ est de module 1.

$|\cos\theta + i\sin\theta| = \sqrt{\cos^2\theta + i\sin^2\theta} = 1$

4) Argument d'un produit et d'un quotient de 2 nombres complexes

a) produit

z => $|z|$ => $agr(z) = \theta[2\pi]$

z' => $|z'|$ => $agr(z') = \theta'[2\pi]$

$z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$

$z' = |z'|(\cos\theta' + i\sin\theta')$

$z.z' = |z|.|z'| \times [(\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta') + i(\cos\theta\sin\theta' - \sin\theta\cos\theta')]$

$z.z' = |zz'| \times [\cos(\theta + \theta') + i\sin(\theta + \theta')]$

$|zz'| = |z| \times |z'|$; $\arg(z.z') = \arg(z).\arg(z')$

$\theta + \theta' = \arg(z) + \arg(z')[2\pi]$

b) Inverse

$z = |z| \times (\cos\theta + i\sin\theta)$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{|z| \times (\cos\theta + i\sin\theta)}$$

$$\frac{1}{z} = \frac{(\cos\theta - i\sin\theta)}{(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta - i\sin\theta)}$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{|z|} \times (\cos\theta - i\sin\theta)$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{|z|} \times [\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)]$$

car : $\cos(-\theta) = \cos\theta$

et $\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$

$$\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|} ; \arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z)[2\pi]$$

c) Quotient

$$\frac{z'}{z} = z' \times \frac{1}{z}$$

$\arg\left(\frac{z'}{z}\right) = \arg(z') + \arg\left(\frac{1}{z}\right)[2\pi]$ grâce au a)

$\arg\left(\frac{z'}{z}\right) = \arg(z') + \arg(z)[2\pi]$ grâce au b)

d) Argument de z^n, $n \in Z$

$\arg(z^2) = \arg(z) + \arg(z)\ [2\pi]$

Par récurrence, on démontre que :

Pour $n \in Z^*$: $\arg(z^n) = n\arg(z)[2\pi]$

Pour $n \in Z$: $\arg(z^n) = n\arg(z)[2\pi]$

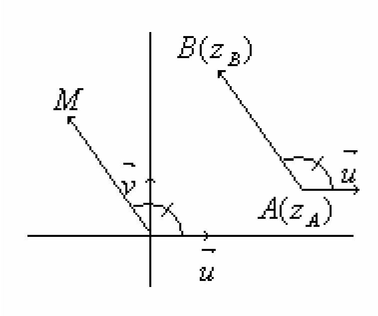
$z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$

$z^n = |z^n|(\cos\theta + i\sin\theta)^n$

$z^n = |z^n|(\cos n\theta + i\sin n\theta)$ Formule de Moivre.

5) Interprétation géométrique de $(z_B - z_A)$ et de $\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_D}$

a) $(z_B - z_A)$



$|z_B - z_A| = AB = \|\overrightarrow{AB}\|$

$\arg(z_B - z_A)$

$(\vec{u}\,;\overrightarrow{AB}) = (\vec{u}\,;\overrightarrow{OM})$

$\arg(z_B - z_A) = (\vec{u}\,;\overrightarrow{OM})$

M est tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB}$
M d'affixe $(z_B - z_A)$
$z_M = z_B - z_A$

Exemple :
Arg(z + i) = arg[z – (- i)]
A d'affixe –i
M d'affixe z
arg(z + i) = $(\vec{u}\,;\overrightarrow{AM})$

arg(z + i) = π
$(\vec{u}\,;\overrightarrow{AM}) = \pi$
$\vec{u}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires de sens contraires.

b) $\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_D}$, $z_C \neq z_D$

A et $\overrightarrow{OA}$ ont pour affixe z_A, B et $\overrightarrow{OB}$: z_B etc…

¤ Module :

$$\left|\frac{z_B - z_A}{z_C - z_D}\right| = \frac{|z_B - z_A|}{|z_C - z_D|} = \frac{AB}{DC}$$

¤ Argument :

$$\arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_D}\right) = \arg(z_B - z_A) - \arg(z_C - z_D)$$
$$= (\vec{u}\,;\overrightarrow{AB}) - (\vec{u}\,;\overrightarrow{DC})$$
$$= (\vec{u}\,;\overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{DC}\,;\vec{u})$$
$$= (\overrightarrow{DC}\,;\vec{u}) + (\vec{u}\,;\overrightarrow{AB})$$
$$= (\overrightarrow{DC}\,;\overrightarrow{AB})$$

$$\arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_D}\right) = (\overrightarrow{DC}\,;\overrightarrow{AB})[2\pi]$$

avec $z_C \neq z_D$ et $z_B \neq z_A$

II Ecriture exponentielle d'un complexe

θ et θ', 2 réels quelconques ;
$$f : R \to C$$
$$\theta \to (\cos\theta + i\sin\theta) = f(\theta)$$

- $\left|f(\theta)\times f(\theta')\right| = \left|f(\theta)\right|\times\left|f(\theta')\right| = 1\times 1 = 1$

$\arg[f(\theta)\times f(\theta')] = \arg[f(\theta)] + \arg[f(\theta)]$

$= \theta + \theta'$

$f(\theta)\times f(\theta') = \cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta')$

- On admet que f est dérivable sur R

$f(\theta)\times f(\theta') = \cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta')$

$f'(\theta) = -\sin\theta + i\cos\theta = i^2\sin\theta + i\cos\theta = i(\cos\theta + i\sin\theta)$

$f'(\theta) = if(\theta)$

On note : $\boxed{\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}}$

Forme exponentielle d'un nombre complexe quelconque :
Soit z un nombre complexe de module ρ et d'argument θ.
Alors, z s'écrit : $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ et $z = \rho.e^{i\theta}$: forme exponentielle de z.

Propriétés :
Quelque soient θ et θ' :

(1) $e^{i\theta}\times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')} \rightarrow \rho.e^{i\theta}\times\rho'.e^{i\theta'} = \rho.\rho'.e^{i(\theta+\theta')}$

(2) $\frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = e^{i\overline{\theta}} \rightarrow \frac{1}{\rho.e^{i\theta}} = \frac{1}{\rho}\times e^{-i\theta}$

(3) $\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')} \rightarrow \frac{\rho.e^{i\theta}}{\rho'.e^{i\theta'}} = \frac{\rho}{\rho'}\times e^{i(\theta-\theta')}$

(4) $[e^{i\theta}]^n = e^{in\theta}$ pour tout $n\in Z \rightarrow [\rho.e^{i\theta}]^n = \rho^n.e^{in\theta}$

(5) $\left|e^{i\theta}\right| = 1$

Exemple :

- $e^{i\times 0} = \cos 0 + i\sin 0 = 1$
- $e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = -1$
- $\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = e^{i\frac{\pi}{2}}$
- $\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3} = \cos\frac{-\pi}{3} + i\sin\frac{-\pi}{3} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$
- $e^{-i\frac{\pi}{6}} = \cos\frac{-\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$

III Nombres complexes et transformations du plan

1) Translation

Soit t une translation de vecteur $\vec{w}$, d'affixe $z_{\vec{w}}$. A tout point M d'affixe z, t associe le point M' d'affixe s' tel que : $\overrightarrow{MM'} = \vec{w}$

L'écriture complexe de t est :

$z' = z + z_{\vec{w}}$

$MM' = z' - z$

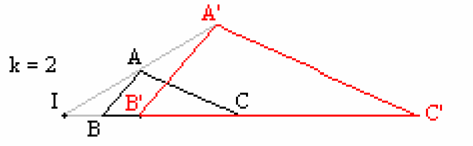
$z' - z = z_{\vec{w}}$

2) Homothétie

a) Définition :

Soit h une homothétie de centre I de rapport k (réel non nul)
Le point M admet pour image le point M' tel que : $\overrightarrow{IM'} = k\overrightarrow{IM}$

$M(z)\xrightarrow{h}M'(z')$ et $\overrightarrow{IM'}=k\overrightarrow{IM}$



b) Caractérisation :

- h de centre I de rapport k (réel non nul)

$M \to M'$

$N \to N'$

Alors : $\overrightarrow{M'N'}=k.\overrightarrow{MN}$

- réciproquement :

$f : M \to M'$

$f : N \to N'$

Si, quelque soient M et N, $\overrightarrow{M'N'}=k.\overrightarrow{MN}$ où $k \in R^*$,
Alors : f est une homothétie de rapport k.

c) Ecriture complexe d'une homothétie :

h : homothétie de centre I, de rapport k ($k \in R^*$)

$M(z) \to M'(z')$

$\overrightarrow{IM'}=k\overrightarrow{IM}$

Soit z_I l'affixe de I (z' - z_I) l'affixe de $\overrightarrow{IM'}$; (z - z_I) l'affixe de $\overrightarrow{IM}$.

L'égalité vectorielle donne :

(z' - z_I) = k x (z - z_I)

$\boxed{z'=k(z-z_I)+z_I}$

Ecriture complexe de l'homothétie.

Remarque : Une symétrie centrale de centre I est une homothétie de rapport -1.

3) Rotation

a) Définition

M' est l'image de M par une rotation de centre Ω et d'angle θ signifie :

$\Omega M'=\Omega M$

$(\overrightarrow{\Omega M'};\overrightarrow{\Omega M})=\theta$

b) Ecriture complexe d'une rotation

M d'affixe z ; M' d'affixe z' ; Ω d'affixe z_Ω.

$M \to M'$.

- $$\Omega M'=\Omega M \Leftrightarrow \frac{\Omega M'}{\Omega M}=1 \text{ (pour } M \neq \Omega)$$
$$\Leftrightarrow \frac{|z'-z_\Omega|}{|z-z_\Omega|}=1$$
$$\Leftrightarrow \left|\frac{z'-z_\Omega}{z-z_\Omega}\right|=1$$

- $$(\overrightarrow{\Omega M'};\overrightarrow{\Omega M})=\theta \text{ avec M} \neq \Omega \text{ et M'} \neq \Omega$$
$$\Leftrightarrow \arg\left(\frac{z'-z_\Omega}{z-z_\Omega}\right)=\theta[2\pi]$$

D'où $\dfrac{z'-z_\Omega}{z-z_\Omega}$ a pour module 1 et pour argument $\theta[2\pi]$

$$\frac{z'-z_\Omega}{z-z_\Omega}=e^{i\theta}$$

d'où :

$$\boxed{\begin{array}{l} z'-z_\Omega=(z-z_\Omega)\times e^{i\theta} \\ z'=z_\Omega+(z-z_\Omega)\times e^{i\theta} \end{array}}$$

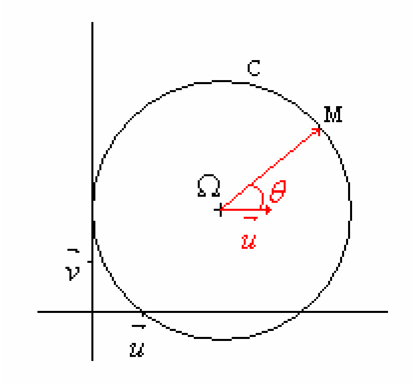
Ecriture complexe de la rotation de centre Ω et d'angle θ.

Cas particulier :

Si Ω est l'origine du repère : $z_\Omega=0$

Si $z_\Omega=0$, $\boxed{z'=z\times e^{i\theta}}$

IV Equation complexe d'un cercle



C est le cercle de centre Ω, de rayon r

Ω, d'affixe z_Ω, constante.

M d'affixe z, variable.

$\overrightarrow{\Omega M'}$ d'affixe z - z_Ω

$$\arg(\vec{u}\,;\overrightarrow{\Omega M'})=\theta \text{ (variable)}$$

$$z-z_\Omega=r(\cos\theta+i\sin\theta)$$

$$z-z_\Omega=r.e^{i\theta}$$

$$\boxed{z=z_\Omega+r.e^{i\theta}}$$

Tout point M d'affixe z du cercle C de centre Ω (d'affixe z_Ω) et de rayon r vérifie l'équation :

$$\boxed{z=z_\Omega+r.e^{i\theta}}$$