LOGARITHME

I La fonction logarithme népérien

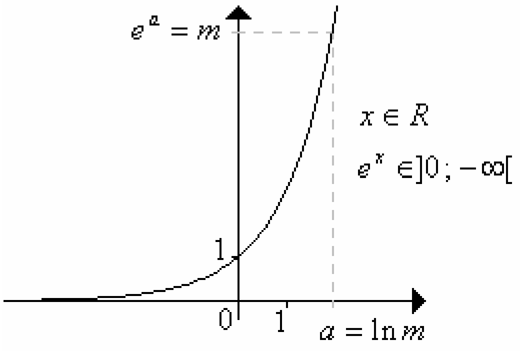
$R \to]0\,;+\infty[$

$x \mapsto \exp(x) = e^x$

x	$-\infty$	$+\infty$
e^x	0	$+\infty$

La fonction "exp" est continue, strictement croissante de $]+\infty\,;-\infty[$ sur $]0\,;+\infty[$

Donc quel que soit m réel strictement positif l'équation $e^a = m$, d'inconnue a, admet une solution unique dans R.



$$\ln m = \ln e^a = a$$
$$\exp(a) = \exp(\ln m) = m$$

Définition :

Soit m un réel strictement positif, le réel unique solution de l'équation $e^a = m$, d'inconnue a, s'appelle logarithme népérien de m. On le note ln m. A chaque réel strictement positif, m admet un logarithme népérien dont on définit ainsi la fonction $m \mapsto \ln m$; $x \mapsto \ln x$.

Conséquences immédiates :

(1) : $y = \ln x$ et $x > 0 \Leftrightarrow x = e^y$

(2) :
$e^0 = 1 \Leftrightarrow \ln 1 = 0$
$e^1 = e \Leftrightarrow \ln e = 1$

(3) : pour x > 0, $\exp(\ln x) = e^{\ln x} = x$

pour $x \in R$, $\ln(\exp(x)) = \ln(e^x) = x$

Propriétés de la fonction ln :

(1) : ln est définit sur $]0\,;+\infty[$ à valeur de R

(2) ln est continu sur $]0\,;+\infty[$

(3) ln est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ avec $(\ln)'(x) = \dfrac{1}{x}$, avec x > 0

Conséquences :

a) pour tout x > 0, $(\ln)'(x) > 0$ donc ln est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$ d'où, quels qu'soient a > 0, et b > 0 :

$\ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b$

$\ln a < \ln b \Leftrightarrow a < b$

$\ln x < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$

$\ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1$

b) $\ln(h+1) \approx h$ au voisinage de 1 (pour h petit)

$$f(a+h) \approx f(a) + f'(a) \times h$$

$$\ln(h+1) \approx \underbrace{\ln(1)}_{=0} + (\ln)'(1) \times h$$

$$(\ln)'(x) = \frac{1}{x}$$

$$(\ln)'(1) = 1$$

$$\ln(1+h) \approx 1 \times h$$

(4) limites :

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ (admise 1 p 122)

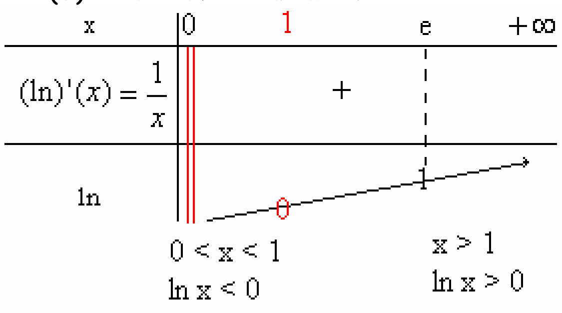
$\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$

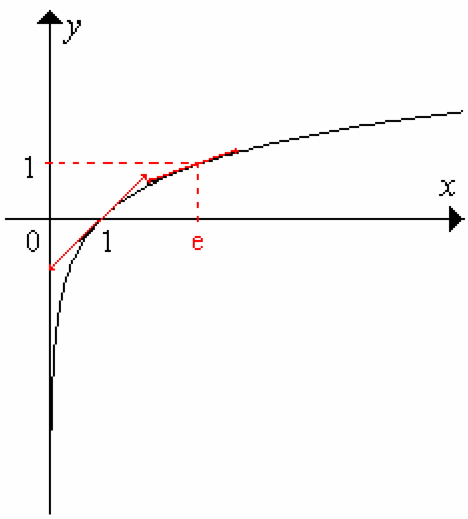
On pose $X = \dfrac{1}{x}$; $\lim\limits_{x \to 0^+} X = +\infty$

Donc :
$$\begin{aligned}\lim_{x \to 0^+} \ln x &= \lim_{X \to +\infty} \ln\left(\frac{1}{X}\right)\\ &= \lim_{X \to +\infty} (-\ln X)\\ &= -\infty\end{aligned}$$

La courbe admet une asymptote verticale d'équation x = 0.

(5) : Tableau de variation :





(6) : Courbe représentative :

- tangente en A (1 ; 0) :

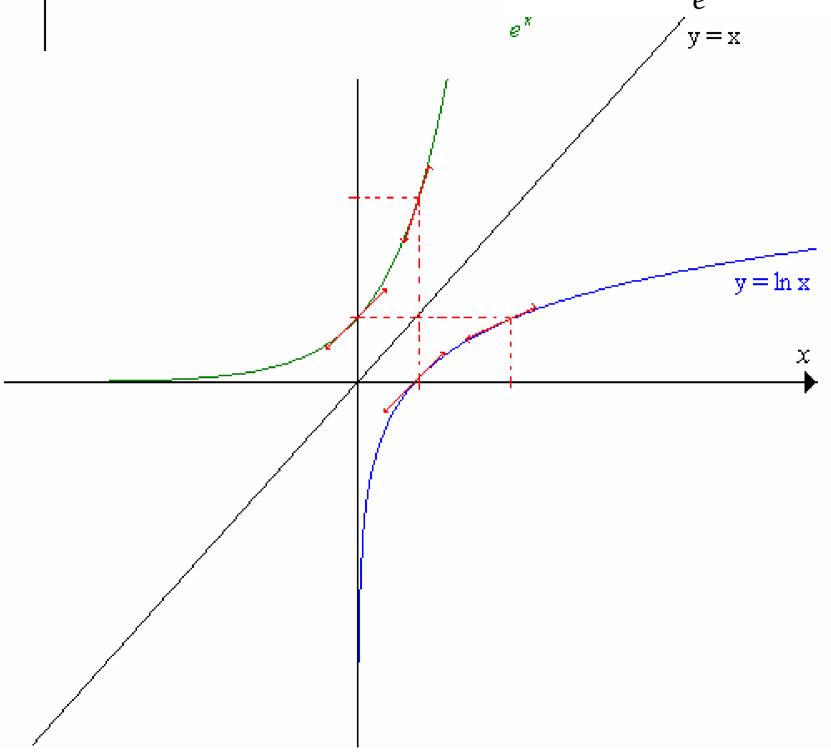
a = 1 ; f(1) = ln 1 = 0 ; f'(1) = $\dfrac{1}{1}$ = 1

d'où : y = x - 1

- tangente en B (e ; 1) :

a = e ; f(e) = ln e = 1 ; f'(e) = $\dfrac{1}{e}$

d'où :
$$y = 1 \times \frac{1}{e}(x - e)$$
$$y = \frac{1}{e}x$$



A(1 ; 0) ; B(e ; 1)

A'(0 ; 1) ; B'(1 ; e)

II Propriétés fondamentales et conséquences

1) Enoncé de la propriété fondamentale

Quelques soient a et b strictement positifs :

$\boxed{\ln(a \times b) = \ln a + \ln b}$

Démonstration :

- exp (ln(a x b)) = a x b
- exp (ln a + ln b) = exp (ln a) x exp (ln b) ($e^{k+k'} = e^k \times e^{k'}$)
  = a x b

donc exp (ln(ab)) = exp (ln a + ln b)
donc ln (ab) = ln a + ln b

Réciproquement, on admettra que toute fonction f qui vérifié f(a x b) = f(a) x f(b) pout tout a > 0 et tout b > 0 est une fonction logarithme.

2) Conséquences :

Pour tout a > 0 et tout b > 0 :

a) $\ln(\frac{1}{b}) = -\ln b$

b) $\ln(\frac{a}{b}) = \ln a - \ln b$

c) $\ln a^n = n \ln a$, $n \in N$

d) $\ln a^{-n} = -n \ln a$

e) $\ln \sqrt{a} = \frac{1}{2} \ln a$

Démonstrations :

a)

$$b \times \frac{1}{b} = 1$$

$$\ln(b \times \frac{1}{b}) = \ln 1$$

$$\ln(b) + \ln(\frac{1}{b}) = 0$$

$$\ln(\frac{1}{b}) = -\ln(b)$$

b)

$$\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}$$

$$\ln(\frac{a}{b}) = \ln(a \times \frac{1}{b})$$

$$\ln(\frac{a}{b}) = \ln a + \ln \frac{1}{b}$$

$$\ln(\frac{a}{b}) = \ln a - \ln b$$

c) par récurrence :

$$\ln a^2 = \ln a + \ln a$$

$$\ln a^2 = 2 \ln a$$

$$\ln a^3 = \ln a^2 + \ln a$$

$$\ln a^3 = 3 \ln a$$

d)

$$\ln(a^{-n}) = \ln(\frac{1}{a^n}) = -\ln a^n = -n \ln a$$

e) $a = (\sqrt{a})^2$

$\ln a = \ln[(\sqrt{a})^2] = 2\ln\sqrt{a}$

$\ln\sqrt{a} = \frac{1}{2}\ln a$

III Limites à connaître

1) $\lim_{x\to+\infty}\ln x = +\infty$

2) $\lim_{x\to 0^+}\ln x = -\infty$

3) $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}$ (FI) :

On pose X = ln x c'est-à-dire : $\mathrm{x} = \mathrm{e}^{\mathrm{X}}$

$\lim_{x\to+\infty} X = \lim_{x\to+\infty}\ln x = +\infty$

$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}\lim_{x\to+\infty}\frac{X}{e^X}$

Or, $\lim_{X\to+\infty}\frac{X}{e^X} = +\infty$

$\lim_{X\to+\infty}\frac{X}{e^X} = 0^+$

d'où : $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} = 0^+$

4)

$\lim_{x\to 0^+} x\ln x$ (FI)

$\mathrm{X} = \frac{1}{\mathrm{x}}$ soit $x = \frac{1}{X}$

$\lim_{x\to 0^+} X = \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x} = +\infty$

$\lim_{x\to 0^+} x\ln x = \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{X}\ln(\frac{1}{X}) = \lim_{X\to+\infty}\frac{1}{X}\times(-\ln X) = \lim_{X\to+\infty} -\frac{\ln(X)}{X}$

$\lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0^-$

d'où $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} = 0^+$

5) Plus généralement : $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} = 0$, pour $n\in N^*$.

$\lim_{x\to 0^+} x^n\ln(x) = 0$, pour $n\in N^*$

$n\geq 2 : \frac{\ln x}{x^n} = \frac{\ln x}{x}\times\frac{1}{x^{n-1}} \quad n-1\geq 1$

$x^n\ln x = x^{n-1}\times x\ln x$ $(= 0 \text{ quand } \mathrm{x} = 0)$

6) $\lim_{h\to 0}\frac{\ln(1+h)}{h}$

$\frac{\ln(1+h)}{h} = \frac{\ln(1+h)-\ln 1}{h}$; ln est dérivable sur $]0\,;+\infty[$

donc $\lim_{h\to 0}\frac{\ln(1+h)-\ln 1}{h} = (\ln)'(1) = 1$

$\Rightarrow \lim_{h\to 0}\frac{\ln(1+h)}{h} = 1$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1}\frac{\ln 1}{x-1}=1 \quad x=1+h \;;\; h=x-1$$

$$\lim_{x\to 1}(x-1)=\lim_{h\to 0}h=0$$

V Fonction composées

F(x) = ln[u(x)]

1) f est définie sur tout intervalle I où u(x) > 0
2) f est continue sur tout intervalle I où u(x) > 0
3) f est dérivable sur tout intervalle I où u(x) > 0
4)

Si $f = v\circ u$ alors $f' = u'\times(v'\circ u)$

Si $f = \ln\circ u$ alors

$$f' = u'\times\frac{1}{u}=\frac{u'}{u}$$

$$f'(x)=\frac{u'(x)}{u(x)}$$

Exemple :

a) f(x) = ln(-x)

f est définie, continue, dérivable sur]-∞ ; 0[

$$f'(x)=\frac{-1}{-x}=\frac{1}{x}$$

Remarque :

$f(x)=\ln(-x)$ et $f'(x)=\frac{1}{x}$ pour x < 0

$g(x)=\ln x$ et $g'(x)=\frac{1}{x}$ pour x > 0

La fonction $x\mapsto\frac{1}{x}$ admet des primitives

$F : x\mapsto \ln x + k$ quand $x>0$

$F : x\mapsto \ln(-x) + k$ quand $x>0$

C'est-à-dire : $F : x\mapsto \ln|x| + k$ sur tout l'intervalle contenu dans R / {0}.

b) voir cours papier.

Exercices : voir cours papier

VI Equations et inéquations

Voir cours papier

Systèmes…

VII Logarithme décimal

1) Définition

Soit x, un réel strictement positif.

Le logarithme décimal de x se note $\log(x)$ et il est définit par $\log(x)=\frac{\ln x}{\ln 10}$

2) Propriétés

$$\log(1)=\frac{\ln 1}{\ln 10}=0$$

$$\log(10)=\frac{\ln 10}{\ln 10}=1$$

Quelque soient a > 0 et b > 0 :

$$\log(ab) = \log(a) + \log(b) \quad \log(ab) = \frac{\ln(ab)}{\ln 10} = \frac{\ln a + \ln b}{\ln 10} = \frac{\ln a}{\ln 10} + \frac{\ln b}{\ln 10} = \log a + \log b$$

$$\log\left(\frac{1}{b}\right) = -\log(b)$$

$$\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b)$$

$$\log(a^n) = n\log(a), n \in Z$$

$$\log(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\log(a)$$

Exemples :

$$\log(10)^n = n\log(10) = n$$

$\log(4.2)$ (connu : tables ou calculatrice)

$$\log(4200) = \log(4.2 \times 10^3)$$
$$= \log(4.2) + \log(10^3)$$
$$= 3 + \log(4.2)$$

$$\log(0.042) = \log(4.2 \times 10^{-2})$$
$$= \log(4.2) + \log(10^{-2})$$
$$= -2 + \log(4.2)$$

Avec 0 < a < 10 :

$$\log(a \times 10^n) = n + \log(a), n \in Z$$

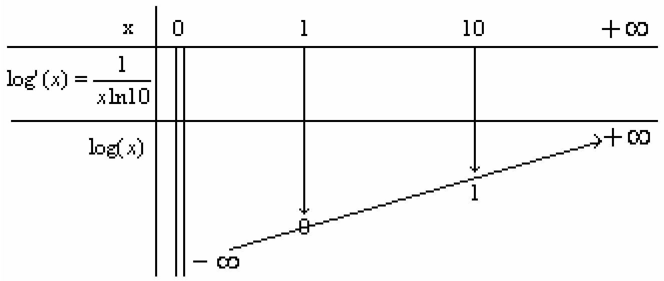
3) Variations de la fonction logarithme décimal

$$\log(x) = \frac{\ln x}{\ln 10}$$

- log, défini, continu, dérivable sur] 0 ; +∞ [
- $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^+} \log(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \log(x) = +\infty \end{array}\right\} car 10 > 0$
- $(\log)'(x) = \frac{1}{\ln 10} \times \frac{1}{x}$

  $(\log)'(x) > 0$ sur $]0\,;+\infty[$

  log strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$



Courbe représentative des fonctions ln(x) et log(x)