

FONCTION EXPONENTIELLE DE BASE QUELCONQUE

FONCTIONS RACINES N^{ème}

CROISSANCE COMPAREES

I Les nombres a^b

1) Définition

Pour tout b réel et pour tout a réel strictement positif, on définit a^b par $a^b = e^{b \ln a}$

- Justification : $e^{b \ln a} = e^{(\ln a)^b} = a^b$
- Exemples : $2^{1.5} = e^{1.5 \ln 2}$; $0.8^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2} \ln 0.8}$; $7.2^{-5.1} = e^{-5.1 \ln 7.2}$
- Remarque : $1^b = e^{b \ln 1} = e^0 = 1$ pour tout réel b

2) Propriétés Se déduisent de celles de la fonction $x \mapsto e^x$ quels que soient a et a' réels strictement positifs et b et b' réels quelconques :

- (1) $a^b \times a^{b'} = a^{b+b'}$
- (2) $\frac{1}{a^{b'}} = a^{-b'}$ et $\frac{a^b}{a^{b'}} = a^{b-b'}$
- (3) $(a^b)^{b'} = a^{b \times b'}$
- (4) $a^b \times a^{b'} = (aa')^b$
- (5) $\frac{a^b}{a^{b'}} = \left(\frac{a}{a'}\right)^b$

Si en plus, $a \neq 1$:

- (6) $a^b = a^{b'} \Leftrightarrow b = b'$
- (7) $\left. \begin{array}{l} ab < ab' \\ 0 < a < 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow b > b'$
- (8) $\left. \begin{array}{l} ab < ab' \\ a > 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow b < b'$

II Fonctions exponentielles de base a ($a > 0$)

1) Définition

Soit a un réel strictement positif.

La fonction qui, à tout réel x associe a^x , est appelée fonction exponentielle de base a .

$$x \mapsto a^x = e^{x \ln a}$$

- Remarques : Si $a = 1$, la fonction est constante

Si $a = e$, on retrouve $x \mapsto e^x$

- Exemples : $x \mapsto 2^x$; $x \mapsto 0.3^x$; $x \mapsto \sqrt{7}^x$

2) Propriété

Les fonctions $g_a : x \mapsto a^x$, ($a > 0$) sont définies, continues, et dérivables sur $\mathbb{R}$

Avec $g'_a(x) = (\ln a) \times a^x = (\ln a) \times e^{x \ln a}$

3) Variations et limites de $g_a : x \mapsto a^x$ avec $a > 0$ et $a \neq 1$

$\forall 0 < a < 1$, $\ln(a) < 0$; $g'_a(x) = (\ln a) e^{x \ln a}$

- $g'_a(x) < 0$

g_a est strictement décroissante sur

$$- \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x \ln a} = +\infty$$

$$- \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x \ln a} = 0$$

Variations :

x	$-\infty$	$+\infty$
$g'_a(x)$		-
g_a	$+\infty$	0

$\mathbb{R}$

$$\text{si } a > 1, \ln(a) > 0; g'_a(x) = (\ln a)e^{x \ln a}$$

$$- g'_a(x) > 0$$

g_a est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x \ln a} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x \ln a} = +\infty$$

Variations :

x	$-\infty$	$+\infty$
$g'_a(x)$		-
g_a	0	$+\infty$

4) représentation graphique

Construire, pour $x \in [-5; 5]$ les courbes représentant :

$$x \mapsto 1.2^x; x \mapsto 0.3^x; x \mapsto 2.5^x; x \mapsto 0.8^x$$

5) Exercices

Voir cours papier

III Les fonctions "puissance", n entier non nul

(rappels)

$$(1) f_n : x \mapsto x^n, n \text{ entier}, n > 0$$

f_n est définie, continue, dérivable sur $\mathbb{R}$, $f'_n(x) = n \cdot x^{n-1}$

si Cas de n pair :

- f_n est paire

$$- \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'_n(x)$	-	0	+
f_n	$+\infty$	0	$+\infty$

si Cas de n impaire :

- f_n est impaire

$$- \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'_n(x)$	+	0	+
f_n	$-\infty$	0	$+\infty$

Toutes ces fonctions sont strictement croissantes sur $[0; +\infty[$.

$$(2) f_n : x \mapsto x^{-n}, n \text{ entier}, n > 0$$

$$f_n(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

f_n est définie, continue, dérivable sur $\mathbb{R}/\{0\}$

$$f'_n(x) = -\frac{n}{x^{n+1}} = -nx^{-(n+1)}$$

si Cas de n pair :

- f_n est paire

$$- \lim_{x \rightarrow -\infty} x^{-n} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{-n} = 0^+$$

$$- \lim_{x \rightarrow 0^-} x^{-n} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{-n} = +\infty$$

si Cas de n impaire :

- f_n est impaire

$$- \lim_{x \rightarrow -\infty} x^{-n} = 0^- \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{-n} = 0^+$$

$$- \lim_{x \rightarrow 0^-} x^{-n} = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{-n} = +\infty$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'_n(x)$	+		-
f_n	0	$+\infty$	0

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'_n(x)$	+		-
f_n	0	$+\infty$	0

(3) Généralisation :

Soit r un réel non nul, Les fonctions "puissance", d'exposant r , sont définies par :

$$f_r(x) = x^r = e^{r \ln x} \text{ pour } x \in]0; +\infty[$$

Elles sont dérivables sur $]0; +\infty[$ avec $f'_r(x) = r \cdot x^{r-1}$

IV Les fonctions "racines $n^{\text{ème}}$ " (x entier naturel, $n \geq 2$)

1) Racine $n^{\text{ème}}$ d'un nombre réel positif

- n est un entier naturel supérieur ou égal à 2

- La fonction $f_n : x \mapsto x^n$ est continue et dérivable sur $[0; +\infty[$ avec $f'_n(x) = n \cdot x^{n-1}$

- $f'_n(x) > 0$ pour tout $x > 0$ donc f_n est strictement croissante sur $[0; +\infty[$

- $f'_n(0) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$

On en déduit que f_n réalise une bijection de $[0; +\infty[$ sur $[0; +\infty[$. Par suite, l'équation $x^n = a$ ($a \geq 0$) admet une solution unique dans $[0; +\infty[$.

Définition :

a est un réel positif et n un entier naturel, $n \geq 2$. Le nombre réel positif unique solution de $x^n = a$ s'appelle racine $n^{\text{ème}}$ de a et se note $\sqrt[n]{a}$

$$a = x^n \Leftrightarrow x = \sqrt[n]{a} \quad (a > 0)$$

Propriété :

- D'après I, $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a$ d'où $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$

- Si $n = \frac{p}{q}$, p et q entiers naturels et $q \geq 2$, alors : $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$

2) La fonction "racine $n^{\text{ème}}$ " ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$)

Définition :

La fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f_n(x) = \sqrt[n]{x}$ s'appelle fonction "racine $n^{\text{ème}}$ ".

Remarque : Pour tout $x > 0$, $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n} \ln x}$

Variations :

- La fonction $f_n : x \mapsto \sqrt[n]{x}$ est :

▀ définie et continue sur $[0; +\infty[$

▀ dérivable sur $]0; +\infty[$ avec $f'_n(x) = \frac{1}{nx} \times e^{\frac{1}{n} \ln x} = \frac{1}{nx} \times x^{\frac{1}{n}} ; \quad f'_n(x) = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$

- $f'_n(x) > 0$ pour tout $x > 0$, donc f_n est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

Limites :

$$f_n(0) = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{n} \ln x} = +\infty$$

Tableau de variation :

x	0	$+\infty$
$f'_n(x)$		+
f_n	0	$+\infty$

Courbe représentative :

D'après III 1), la fonction $f_n : x \mapsto \sqrt[n]{x}$ est la réciproque de la fonction $x \mapsto x^n$, donc les deux courbes sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$ (en repère orthonormal). Par suite, la courbe $C(f_n)$ admet l'axe des ordonnées pour tangente en 0.

V Croissance comparées

1) Croissance comparée au voisinage de $+\infty$

Les fonctions $x \mapsto e^x$

$x \mapsto \ln x$

$x \mapsto x^n$, avec $n \in \mathbb{N}^*$

Sont strictement croissantes sur $]0; +\infty[$ et tendent vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$, mais pas avec la même rapidité.

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0 \text{ pour } n \text{ entier, } n \geq 1$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \text{ pour } n \text{ entier, } n \geq 1$$

Quand $x \rightarrow +\infty$:

La fonction exponentielle $x \mapsto e^x$ tend vers $+\infty$ plus vite que les fonctions puissance $x \mapsto x^n$, et celles-ci tendent vers $+\infty$ plus vite que la fonction logarithme népérien $x \mapsto \ln x$.

2) Conséquences

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln x = 0 \text{ pour } n \text{ entier, } n \geq 1$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0 \text{ pour } n \text{ entier, } n \geq 1$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n e^x = 0 \text{ pour } n \text{ entier, } n \geq 0$$

✕ Démonstrations : exercice 123 p 165

✕ Extension à $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{P(x)}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{P(x)}$, dans le cas où $P(x)$ est un polynôme : exercice résolu 3 p 149.

✕ Exercices :

- Résolus : 1 - 2 p 149
- Pages 157 et suivantes : 59 à 77 - 111 - 112 - 137