SUITES NUMERIQUES

I Rappels

1) Définition

Une suite est une fonction définie sur l'ensemble N (ou sous ensemble de N)

Equation :	Suite :
$R \to R$	$N \to R$
$f : x \mapsto f(x)$	$u : n \mapsto u(n)$
x : variable réelle	n : variable entier naturel

Au lieu de u(n), on note u_n l'image de n par u. **u_n** désigne le **terme général**. **(u_n)** ou **u** désigne **la suite**.

2) Modes de génération d'une suite

a) À l'aide d'une formule

u_n est donnée en fonction de n

Ex :

$u_n = \dfrac{n}{n+1}$ pour n ∈ N

$u_0 = 0$; $u_1 = \dfrac{1}{2}$; $u_2 = \dfrac{2}{3}$; $u_{95} = \dfrac{95}{96}$

b) Par récurrence

C'est-à-dire qu'un terme est exprimé en fonction du précédent. Il faut connaître l'un des termes de la suite.

Ex :

(u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = 2u_n - 1, \text{ pour tout } n \in N \end{cases}$

$u_1 = 2u_0 - 1 = 5$; $u_2 = 2u_1 - 1 = 9$; $u_3 = 2u_2 - 1 = 17$; $u_{90} = ?$ On est obligé de calculer jusque là.

II Suite arithmétiques (rappels)

1) Définition

Une suite (u_n) est arithmétique lorsque chacun de ses termes s'obtient en ajoutant une constante au terme précédent. La constante d'appelle la raison de la suite.

$\boxed{u_{n+1} = u_n + \underset{cste}{r}}$

$\boxed{r = u_{n+1} - u_n}$

ex :

$u_0 = -7$ Premier terme

$u_{n+1} = u_n + \underset{raison}{2}$ pour n ∈ N

$u_1 = -5$; $u_2 = -3$; $u_3 = -1$; $u_4 = 1$

2) Expression de u_n en fonction de u_0 et r

$\boxed{u_n = u_0 + n.r}$ pour $n \in N$

3) Relation entre 2 termes quelconques

$u_n - u_p = (n-p)r$

$\boxed{u_n = u_p + (n-p)r}$

4) Somme de n termes consécutifs

Si le premier terme est a, si le dernier est b, la somme de n termes consécutifs est définie par :

$\boxed{S = \dfrac{a+b}{2}n}$ Soit : $S = \dfrac{1^{\text{er}} \text{ terme} + \text{dernier terme}}{2} \times \text{nombre de termes}$

III Suite géométrique

1) Définition

Une suite est géométrique lorsque chacun de ses termes s'obtient en multipliant le précédent par une constante, appelée raison de la suite.

$$\boxed{u_{n+1} = u_n \times \underset{raison}{q}}$$

$$\boxed{q = \frac{u_{n+1}}{u_n}}$$, Si $u_n \neq 0$

Remarques :
Si q = 0, la suite est la suite nulle à partir de u_1.
Si q = 1, la suite est constante
Si q = -1, la suite est alternée (ou périodique de période 2)

2) Expression du terme général en fonction de q et de u_0

$$\boxed{u_n = u_0 \times q^n} \quad , n \in N$$

3) Relation entre 2 termes quelconques

$$\boxed{u_n = u_p \times q^{n-p}}$$

$$\boxed{q^{n-p} = \frac{u_n}{u_p}}$$ Avec des termes non nuls

4) somme de n termes consécutifs

¤ Si $q \neq 1$ et le premier terme est a.
la somme S de n termes consécutifs soit :

$$\boxed{S = a \times \frac{1-q^n}{1-q}}$$

ou : $$\boxed{S = a \times \frac{q^n - 1}{q-1}}$$

¤ Si q = 1, S = a x n

IV Raisonnement par récurrence

Axiome :

Soit P_n une proposition dépendant d'un entier naturel n.

¤ S'il existe n_0 tel que P_{n0} soit vrai

¤ Si, en admettant que P_k est vrai, on peut démontrer que P_{k+1} est vraie (hypothèse de récurrence ; P_k est héréditaire)

Alors, on peut conclure que P_n est vraie pour tout n supérieur ou égal à n_0.

Exemples :

(1) : voir cours papier

(2) (u_n) est la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = 3 + 2u_n \ , \ n \in N \end{cases}$

Montrer que tous les termes de la suite sont positifs.

P_n : "$u_n \geq 0$"

¤ n = 0 , $u_0 = 0 \geq 0$ donc p_0 est vraie

¤ on suppose que $u_k \geq 0$ (hypothèse de récurrence) on va démontrer que $u_{k+1} \geq 0$

$$u_{k+1} = 3 + 2u_k$$

$$u_k \geq 0 \text{ donc } 2.u_k \geq 0$$

$$\text{donc } 3 + 2.u_k \geq 0$$

Donc $u_{k+1} \geq 0$

Conclusion : Pour tout $n \in N$, P_n est vraie, c'est-à-dire pour tout $n \in N$, $u_n \geq 0$.

V Suite majorée, minoré, bornée

Définition

Soit (u_n) une suite.
1) (u_n) est majorée s'il existe une constante M telle que pour tout M, $u_n \leq M$. M est un majorant de la suite (u_n).
2) (u_n) est minorée s'il existe une constante m telle que pour tout m, $u_n \geq m$. m est un minorant de la suite (u_n).
3) (u_n) est bornée Si et Seulement Si, elle est majorée et minorée.

Exemples :

¤ Dans le 26 p 184 : (u_n) est minorée par 0 et majorée par $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Elle est donc bornée.

¤ $u_n = \frac{1}{n}$, $n \in N^*$

Pour tout $n \in N^*$, $\frac{1}{n} > 0$

Et d'autre part : $n \geq 1$ donc $\frac{1}{n} \leq 1$

(u_n) est bornée par 0 et 1.

¤ $u_n = n^2$, $n \in N$
(u_n) est minorée par 0 et n'est pas majorée.

VI Variations d'une suite

Définition

1) Une suite (u_n) est croissante (strictement) lorsque pour tout n, $u_{n+1} \geq u_n$ $(u_{n+1} > u_n)$
2) Une suite (u_n) est décroissante (strictement) lorsque pour tout n, $u_{n+1} \leq u_n$ $(u_{n+1} < u_n)$
3) Une suite (u_n) est monotone lorsqu'elle est toujours croissante ou décroissante.

Exemples et méthodes :

(1)

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1}, \text{pour tout } n \in N \end{cases}$$

Par récurrence :
P_n : "$u_{n+1} \geq u_n$"
¤ n = 0 ; $u_0 = 2$
$u_1 = \sqrt{u_0 + 1} = \sqrt{3}$
D'où : $u_0 \geq u_1$: P_n est fausse.
P_n : "$u_{n+1} \leq u_n$" : P_n est vraie

¤ hypothèse de récurrence : on suppose que $u_{k+1} \leq u_k$
Il faut démontrer que $u_{k+1} \leq u_k + 1$
Or $u_{k+1} \leq u_k$
Donc : $u_{k+1} + 1 \leq u_k + 1$
Donc : $\sqrt{u_{k+1} + 1} \leq \sqrt{u_k + 1}$ car $\sqrt{x}$ conserve l'ordre.
D'où $u_{k+2} = u_{k+1}$
Conclusion : Pour tout $n \in N$, $u_{n+1} \leq u_n$. c'est-à-dire, (u_n) est décroissante.

(2)

$u_n = 2 + \frac{1}{n}, n \in N^*$

Pour tout $n \in N^*$:

$$u_{n+1} - u_n = (2 + \frac{1}{n+1}) - (2 + \frac{1}{n})$$
$$= \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$$
$$= \frac{n-(n+1)}{n(n+1)}$$
$$u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{n(n+1)}$$

$n \in$ N*, donc n > 0 et n + 1 > 0. n(n + 1) > 0
Donc : $u_{n+1} - u_n < 0$
Donc : $u_{n+1} < u_n$ pour tout n de N*
Conclusion : (u_n) est strictement décroissante.

(3) $u_n = 2^2$, pour tout n de N
Tous les termes sont $\boxed{\text{positifs}}$

Pour tout n de N, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+1}}{2^n} = 2 > 1$

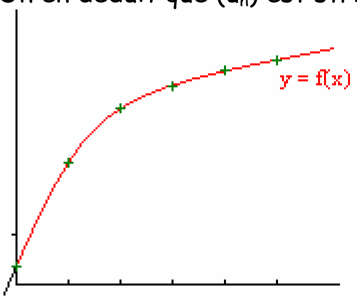
$\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1 \Leftrightarrow u_{n+1} > u_n$ (car $u_n > 0$)
Conclusion : (u_n) est strictement croissante.

Propriétés :
Si (u_n) est définie comme une fonction de n, c'est-à-dire : $u_n = f(n)$,
Si la fonction f de variable réelle est croissante sur [0 ; +∞ [(ou décroissante),
Alors, la suite (u_n) est croissante (ou décroissante)

Exemples :
$$u_n = \frac{n+3}{n+7} = f(n)$$
Soit $f : x \mapsto \frac{x+3}{x+7} n, x \in [0 ; +\infty[$

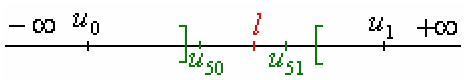
F dérivable sur [0 ; +∞ [avec $f'(x) = \frac{4}{(x+7)^2}$

Pour tout x de[0 ; +∞ [, f'(x) > 0, donc f est strictement croissante sur [0 ; +∞ [.
On en déduit que (u_n) est strictement croissante.

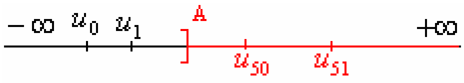


VII Limites de suite – convergence et divergence

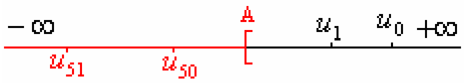
Uniquement quand n tend vers +∞.
Définition :
1) Une suite (u_n) à une limite réelle l lorsque n tend vers +∞ lorsque, quelque soit l'intervalle contenant l, tous les termes de la suite sont dans cet intervalle à partir d'un certain rang. Dans ce cas la suite est dite convergente vers l.



2) Une suite (u_n) à pour limite $+\infty$ n tend vers $+\infty$, lorsque pour tout réel $A > 0$, tous les termes de la suite sont dans l'intervalle $]A\ ;+\infty[$ à partir d'un certain rang. (u_n) est divergente vers $+\infty$.



4) Une suite (u_n) a pour limite $-\infty$ lorsque pour tout réel $A < 0$, tout les termes de la suite sont dans $]-\infty\ ; A[$ La suite est divergente en $-\infty$.



Propriétés :

1) Lorsque $u_n = f(n)$:

Les règles de calcul vues pour les fonctions restent valables (limites de référence – opérations – théorèmes de comparaison)

2) *Cas des suites géométriques* :

$u_n = u_0 \times q^n$, $n \in \mathbb{N}$

Il suffit de connaître $\lim\limits_{x \to +\infty} q^n$

- Si $q = 0$, la suite (q^n) est stationnaire, de limite 0
- Si $q = 1$, la suite (q^n) est stationnaire, de limite 1
- Si $q = -1$, la suite (q^n) est alternée (ou périodique de période 2) et n'a pas de limite
- Si $q > 1$, la suite (q^n) est divergente vers $+\infty$.
- Si $0 < q < 1$, la suite (q^n) converge vers 0
- Si $-1 < q < 0$, la suite (q^n) converge vers 0
- Si $q < -1$, la suite (q^n) est divergente, n'a pes de limite

Ex : $u_n = 3^n$, $n \in \mathbb{N}$

$q = 3 > 1$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} 3^n = +\infty$

Etc…

3) <u>limite de la composée d'une suite par une fonction</u>

$$\left.\begin{matrix}(u_n)\\ f\end{matrix}\right\} vn = f(u_n)$$

$$n \mapsto u_n \overset{f}{\mapsto} f(u_n)$$

Soient a et b réels ou infinis.

$$\left.\begin{matrix} Si \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = a \\ et\ si \lim\limits_{X \to a} f(X) = b \end{matrix}\right) \lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n) = b$$

Ex : voir cours papier.

4) <u>Convergence des suites majorées ou minorées</u>

On admet que :

a) toute suite croissante et majorée est convergente.
b) Toute suite décroissante et minorée est convergente

5) <u>Suites non majorée ou non minorée</u>

a) toute suite croissante et non majorée est divergente vers $+\infty$
b) toute suite décroissante et non minorée est divergente vers $-\infty$

Ex : voir cours papier.

Compléments :
Soit (u_n), une suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$.
Si (u_n) est convergente st si f est continu sur l'intervalle contenant tous les termes u_n, alors, la limite l de (u_n) est solution de l'équation f(x) = x. (avec $l \in I$).

VIII Suites adjacentes

Définition :

(u_n) et (v_n) sont deux suites adjacents lorsque :
(1) : l'une est croissante
(2) : l'autre est décroissante
(3) $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n - v_n) = 0$

Ex : voir cours papier

Propriété 1 :

Si deux suites (un) et (vn) sont adjacentes, alors elles sont convergentes et elles ont la même limite.

Démonstration :

On suppose que (u_n) est croissante et (v_n) décroissante.
(1) Montrer que $v_n > u_n$ pour tout n de N.
On va poser : $w_n = v_n - u_n$.
On étudie les variations de (w_n) pour tout n de N.

$$w_{n+1} - w_n = (v_{n+1} - u_{n+1}) - (u_n - v_n)$$
$$= (v_{n+1} - v_n) + (u_n - u_{n+1})$$

(v_n) est décroissante donc $v_{n+1} < v_n$ pour tout n de N

$$v_{n+1} - v_n < 0$$

(u_n) est croissante donc $u_{n+1} > u_n$ pour tout n de N

$$u_n - u_{n+1} < 0$$

Donc $w_{n+1} - w_n < 0 \Leftrightarrow w_{n+1} < w_n \Leftrightarrow$ (w_n) est décroissante.
On sait que (w_n) est décroissante et de limite 0.
$w_n > 0$
donc $v_n > u_n$
$u_0 < v_0$

$\boxed{u_0 < u_1 < \ldots < u_n < u_{n+1} < \ldots\ldots < v_{n+1} < v_n < \ldots < v_1 < v_0}$

(2) Montrer que (u_n) et (v_n) sont convergents vers la même limite
(u_n) est croissante et majorée par v_0 donc (u_n) converge vers l_1.
(v_n) est décroissante et minorée u_0 donc (v_n) converge vers l_2.
De plus, $\lim\limits_{n \to +\infty} (v_n - u_n) = 0$
D'où : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} v_n$
D'où : $l_1 = l_2$

Propriété 2 :
Tout nombre réel x peut être encadré par deux suites (u_n) et (v_n) telles que :
(u_n) croissante, (v_n) décroissante.
$(v_n - u_n) \leq 10^{-n}$ pour tout n de N
(u_n) et (v_n) sont adjacentes et le réel x est la limite commune des deux suites.
Exemple :
$x = \sqrt{2}$

$1^2 = 1 < 2$	$1.4^2 < 2$	$1.41^2 < 2$
$2^2 = 4 > 2$	$1.5^2 > 2$	$1.42^2 > 2$

$$u_0 = 1 < \sqrt{2} < 2 = v_0$$
$$u_1 = 1.4 < \sqrt{2} < 1.5 = v_1$$
$$u_2 = 1.41 < \sqrt{2} < 1.42 = v_2$$
$$u_3 = 1.414 < \sqrt{2} < 1.415 = v_3$$
$$u_4 = 1.4142 < \sqrt{2} < 1.4143 = v_4$$

$$v_0 - u_0 = 1 \leq 10^0$$
$$v_1 - u_1 = 0.1 \leq 10^{-1}$$
$$v_2 - u_2 = 0.01 \leq 10^{-2}$$

La limite commune aux deux suites est $\sqrt{2}$

Autre exemple :

$$x = \frac{4}{3}$$

la limite commune des suites entourant $x = \frac{4}{3}$ est $\frac{4}{3}$.

Ou : $\frac{4}{3} = 1.\bar{3}$; $1.\bar{3}$ signifie : 1, avec une infinité de 3 derrière.

$1.\bar{9} = 2$.

$u_{n+1} = f(u_n)$

(u_n) converge vers l.

donc : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$

et $\lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n) = f(l)$

d'où : l est la solution de f(x) = x