CALCUL INTEGRAL

I Intégrale d'une fonction sur un intervalle

Soit f une fonction continue sur un intervalle I contenant a et b.

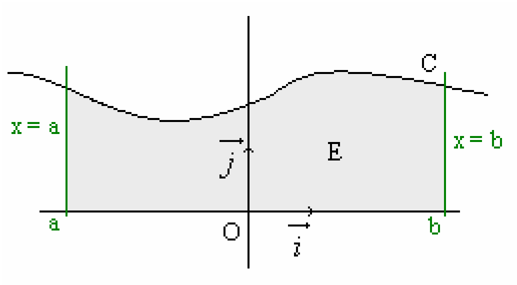
1)

a) "aire sous la courbe"

Soit f une fonction positive sur [a ; b] C sa courbe représentative dans $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ orthogonal.

On appelle "aire sous la courbe de f" l'aire du domaine plan E limité par :

- la courbe C
- l'axe des abscisses
- les droites d'équation x = a et x = b



E est l'ensemble des points M (x ; y)

Tels que : $\begin{cases} a \le x \le b \\ 0 \le y \le f(x) \end{cases}$

b) unités d'aires

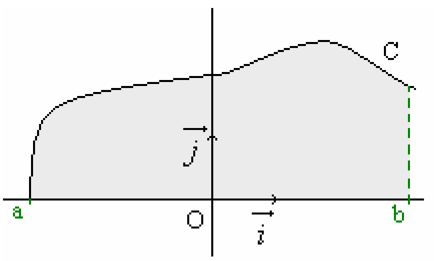
L'unité d'aire est l'aire du rectangle de coté || $\vec{i}$ || et || $\vec{j}$ ||

$\left.\begin{array}{l} \text{Si } \|\vec{i}\| = 2\,cm \\ \text{Et } \|\vec{j}\| = 3\,cm \end{array}\right\}$ alors 1 u.a. pour 6 cm

2) Définition

f est une fonction continue sur l'intervalle I contenant a et b avec a < b.

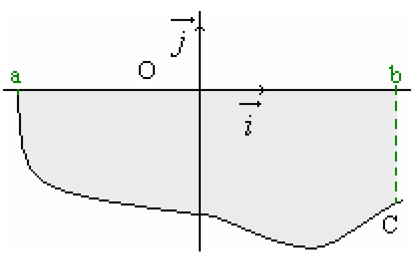
a) Si f est <u>positive</u> sur [a ; b], on appelle intégrale de a à b de f l'aire sous la courbe f pour x ∈ [a ; b].



On note $\int_a^b f(x)dx$ ou $\int_a^b f(t)dt$ ou $\int_a^b f(\alpha)d\alpha$. x, t, α,... : variable muette

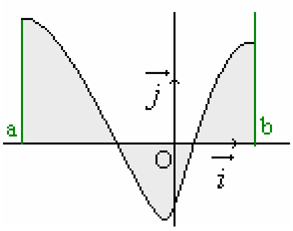
b) Si f est négative sur [a : b]

On appelle intégrale de a à b de f l'opposé de l'aire limitée par la courbe, l'axe des abscisses, et les droites d'équation x = a et x = b.



On note aussi $\int_a^b f(t)dt \qquad \int_a^b f(t)dt \le 0$

c) Si f n'est pas de signe constant, on partage [a ; b] en intervalles où f est de signe constant et on procède comme en a) et en b)



a et b sont les bornes d'intégration

3) Propriétés

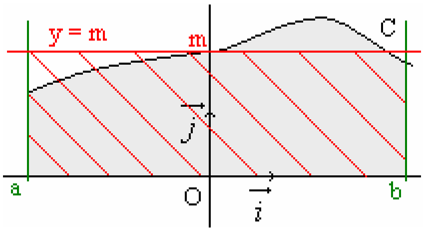
a) ¤ Si f est positif sur [a ; b], alors $\int_a^b f(t)dt \geq 0$

¤ Si f est négatif sur [a ; b], alors $\int_a^b f(t)dt \leq 0$

b) Si f est une constante k sur [a ; b], alors $\int_a^b f(t)dt = \int_a^b kdt = k \times (b-a)$

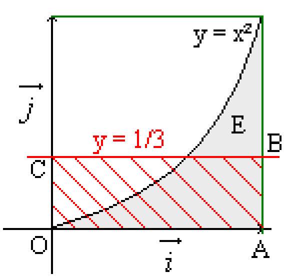
c) valeur moyenne d'une fonction sur [a ; b]

On appelle valeur moyenne de f sur [a ; b] le réel $\overline{m} = \frac{1}{b-a}.\int_a^b f(t)dt$



$$\int_a^b f(t)dt = \overline{m} \times (b-a)$$

Exemple :



$$A(E) = \frac{1}{3}ua$$

$\overline{m} = \frac{1}{1-0}\int_0^1 t^2 dt$ ⇔ 1 x 1/3

La valeur moyenne de f sur [0 ; 1] est $\overline{m} = \frac{1}{3}$

OABC a la même aire que E.

II Propriétés générales des intégrales

1) Théorème (admis)

Toute fonction continue sur un intervalle [a ; b] admet une intégrale sur cet intervalle.
Remarque : il existe des fonctions non continues sur [a ; b] et admettant sur quand même une intégrale. (En particulier les fonctions constantes par intervalles)

2) Propriétés

a) $\int_a^a f(t)dt = 0$

b) $\int_b^a f(t)dt = -\int_a^b f(t)dt$ (par convention)

c) Relation de Chasles :

$$\int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt = \int_a^c f(t)dt$$

d) Linéarité

¤ f et g admettant une intégrale

$$\int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt = \int_a^b [f(t)+g(t)]dt$$

¤ Pour λ constante réelle :

$$\int_a^b \lambda f(t)dt = \lambda \int_a^b f(t)dt$$

e) Intervalle et ordre

Si $f(x) \le g(x)$ pour tout x de [a ; b]

Alors $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$

(En particulier si f(x) ≥ 0 sur [a ; b] alors $\int_a^b f(x)dx \ge 0$

si f(x) ≤ 0 sur [a ; b] alors $\int_a^b f(x)dx \le 0$

f) inégalité de la moyenne

Si f est continue sur [a ; b] et s'il existe 2 constantes m et M telles que $m \le f(x) \le M$ pour tout x de [a ; b], alors

$m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le M$ ($\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ est la valeur moyenne de f sur [a ; b]

Démonstration :

Pour tout x de [a ; b]

$m \le f(x) \le M$

Donc : $\int_a^b m.dx \le \int_a^b f(x)dx \le M.dx$

d'où : $m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$

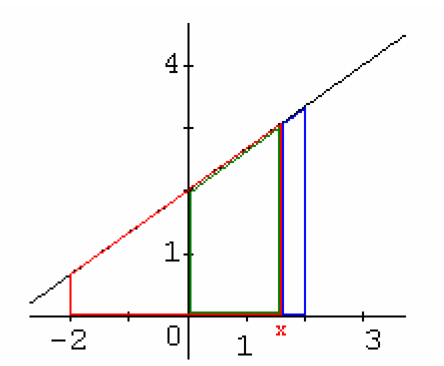
d'où : $m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le M$

III Intégrales et primitives

1) Exercice préliminaire

$f(x) = \frac{2}{3}x + 2$ pour ∈ [-2 ; 3]

a) Déterminer l'aire du domaine sous la courbe.
b) Déterminer l'aire du domaine sous la courbe sur l'intervalle [-2 ; x] puis sur l'intervalle [0 ; x] et enfin sur l'intervalle [x ; 2] avec -2 ≤ x < 2



a) $A = 5 \times \left(\frac{2/3+4}{2}\right) = \frac{35}{3} ua$

b)

$$A_1(x) = (x+2) \times \left[\frac{2/3 + (2/3x+2)}{2}\right]$$

$$\int_{-2}^x f(t)dt \left(\begin{aligned} &= (x+2)\left[\frac{4}{3} + \frac{1}{3}x\right] \\ &= \frac{(x+2)(4+x)}{3} = \frac{x^2+6x+8}{3} \end{aligned} \right.$$

$$A_2(x) = x \times \frac{(2+2/3x+2)}{3} = x \times 2 + \frac{1}{3}x$$

$$\int_0^x f(t)dt \left(= \frac{1}{3}x^2 + 2x \right.$$

$$A_3(x) = (2-x) \times \frac{(4/3 \times 2/3x+2)}{3}$$

$$\int_x^2 f(t)dt \left(= (2-x) \times \left[\frac{8}{3} + \frac{1}{3}x\right] = \frac{(2-x)(8+x)}{3} = \frac{-x^2-6x+16}{3} \right.$$

$A'_1(x) = \frac{2x+6}{3} = \frac{2}{3}x + 2$

$A'_2(x) = \frac{2}{3}x + 2$

$A'_3(x) = \frac{-2x-6}{3} = -\frac{2}{3}x - 2$

f est une fonction positive sur [a ; b] avec a $\leq$ x. L'aire du "domaine sous la courbe" sur [a ; x] est une primitive de f.

2) Théorème

Soit f une fonction continue sur [a ; b] quel que soit x $\in$ [a ; b], la fonction F définie par $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ est dérivable sur [a ; b] avec F' = f. (F est une primitive de f sur [a ; b])

Démonstration : voir cours papier

3) Théorème

Soit f continue sur [a ; b] et x $\in$ [a ; b]

La fonction $F : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est la seule primitive de f qui s'annule pour x = a

Démonstration :

$F(x) = \int_a^x f(t)dt$

$F(a) = \int_a^a f(t)dt = 0$

Soit G une autre primitive de f sur [a ; b]

G(x) = F(x) + k

G(a) = k, car F(a) = 0

G(a) $\neq$ 0

4) Propriété

Soit f continue sur [a ; b] et G une primitive quelconque de f sur [a ; b] alors :

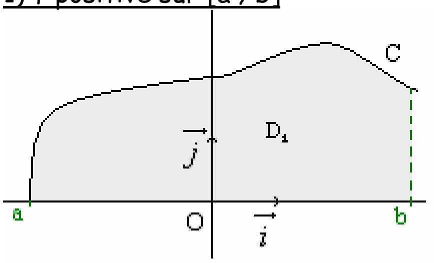
$\int_a^b f(t)dt = G(b) - G(a)$ on note $\int_a^b f(t)dt = [G(t)]_a^b$

Démonstration :

Voir cours papier

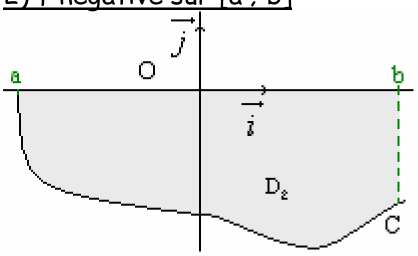
IV Calcul d'aires

1) f positive sur [a ; b]



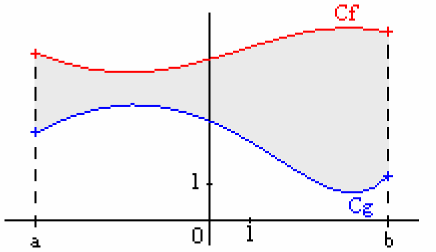
L'aire de D_1 est $\int_a^b f(x)dx$

2) f négative sur [a ; b]



L'aire de D_2 est $-\int_a^b f(x)dx$

3) Aire d'un domaine limité par deux courbes



L'aire de D est :

$$\int_a^b f(t)dt - \int_a^b g(t)dt = \int_a^b (f(t) - g(t))dt$$

Nous admettons que :
Si $f(x) \geq g(x)$ pour tout x de [a ; b]
Alors l'aire du domaine limité par les deux courbe est :

$$\boxed{\int_a^b (f(t) - g(t))dt}$$

Voir exo résolus p 201 + A_1 p 204
Exo : Voir cours papier
Voir 89 p 214

V Intégration par partie

Formule mnémotechnique à retenir mais à ne pas noter dans les copies :

$$\boxed{\int uv' = uv - \int u'v}$$

Si u et v sont deux fonctions dérivables sur [a ; b], de dérivées respectives u' et v', alors :

$$\boxed{\int_a^b u(x) \times v'(x)dx = [u(x) \times v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x) \times v(x)dx}$$

Exemples :

1) Calculer $\int_1^2 xe^x dx$

On prend $u(x) = x$ et $v'(x) = e^x$ d'où $u'(x) = 1$ et $v(x) = e^x$.

$$\int_1^2 xe^x dx = [x \times e^x]_1^2 - \int_1^2 1 \times e^x dx = e^2.$$

2) voir cours papier

VI Calcul de volume

On trouve d'abord l'aire d'une section de ce volume par la méthode vu précédemment, en fonction d'une variable. On applique l'intégrale sur cette aire, les bornes sont celles du volume considéré ; on obtient un volume en unité d'aire ou en cm^3.