PROBABILITE
CONDITIONNEMENT ET INDEPENDANCE

I Vocabulaire

- On lance un dé bien équilibré, on s'intéresse au numéro porté par la face supérieure. Le résultat de cette expérience est imprévisible. On dit que c'est une **expérience aléatoire** ou **épreuve**.

- On peut obtenir 1, 2, 3, 4, 5 ou 6. Ce sont les six résultats ou issues possibles ; on les appelle **éventualités de l'épreuve** "jet de dé ". On les note ω_i.
L'ensemble U de toutes les éventualités est appelé **univers** : U = {1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6}

- Considérons la phrase : "Le résultat est supérieur ou égal à 3 ". Cette phrase est vraie si l'issue du jet est 3, 4, 5 ou 6, elle définit **un évènement** A que l'on note A = {3 ; 4 ; 5 ; 6}
On jette le dé. Soit ω_i le résultat ($\omega_i \in$ U).
On dit que **A est réalisé** si ω_i est élément de A.

- Considérons les évènements: B: "le résultat est pair " C: "le résultat est multiple de 3 "
On a B = {2 ; 4 ; 6} et C = {3 ; 6}
$A \cap B$ = {4 ; 6} c'est **l'évènement A et B** "le résultat est pair et supérieur ou égal à trois"
$B \cup C$ = {2 ; 3 ; 4 ; 6} c'est **l'évènement B ou C** "le résultat est pair ou multiple de trois"

- Soit D = {1 ; 2} = $\overline{A}$
D: "ne pas obtenir un résultat supérieur ou égal à 3 " c'est **l'évènement contraire** de A.

- L'évènement "obtenir 2" se limite à une seule éventualité, c'est **l'évènement élémentaire**.

- L'évènement "obtenir 7 " ne contient aucun élément, c'est **l'évènement impossible**.

- L'évènement " obtenir un nombre inférieur à 7 " contient tous les éléments de U, c'est l'univers tout entier ou **évènement certain**.

- Si E et F sont des évènements de U tels que $E \cap F = \varnothing$, on dit que E et F sont **incompatibles**.

- Si E et F sont des évènements tels que $E \subset F$, si E est réalisé F l'est également, on dit que **E implique F**.

D'une manière générale :
L'univers U est **l'ensemble des éventualités** (ou résultats possibles) d'une **expérience aléatoire**.
Un évènement de U est une partie de U.
Un **évènement élémentaire de U** est une **partie de U** à un seul élément.
La **probabilité d'un évènement** est un **nombre qui mesure les chances** qu'un évènement a de se produire. (Avoir q chances sur n de réaliser un événement E se traduit par une probabilité de q/n)
Une probabilité est un nombre compris entre 0 (pour l'évènement impossible) **et 1** (pour l'évènement certain).

II Définitions et propriétés

Soit un univers fini U = {ω_1 ; ω_2 ; … ; ω_n}
Si à chaque élément ω_i de U, on sait associer un nombre p, compris entre 0 et 1 et si la somme de tous ces nombres est 1, on dit qu'on a défini **une probabilité sur U**. La probabilité de l'évènement élémentaire {ω_i} est p_i.

Soit A une partie de U. Par définition, la probabilité de A est la somme des probabilités des évènements élémentaires inclus dans A. On note p(A) la probabilité de A.
$p(\varnothing) = 0$, p(U) = 1
La probabilité p est une application de l'ensemble des évènements sur l'intervalle [0 ; 1]

- Soit A et B deux évènements de U : **$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$**.

- Si A et B sont deux évènements incompatibles: **$p(A \cup B) = p(A) + p(B)$**.

- Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont des évènements deux à deux incompatibles ($A_i \cap A_j = \varnothing$ pour tout couple (i ; j) d'entiers distincts inférieurs ou égaux à n) alors $p(A_1 \cup A_2 \cup \ldots\ldots \cup A_n = p(A_1) + p(A_2) + \ldots + p(A_n)$

- A et $\overline{A}$ sont incompatibles et $A \cup \overline{A} = U$, donc: $p(A \cup \overline{A}) = p(U) = 1 = p(A) + p(\overline{A})$ d'où: **$p(\overline{A}) = 1 - p(A)$**.

- Si A et B sont des évènements tels que A implique B alors $p(A) \leq p(B)$.

- Si tous les évènements élémentaires d'un univers U ont la même probabilité, on dit que **l'hypothèse d'équiprobabilité est satisfaite**.

Sous l'hypothèse d'équiprobabilité, la probabilité d'un évènement A est:

$$p(A) = \frac{\text{Card } A}{\text{Card } U} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$$

Card = Cardinal ; le cardinal d'un ensemble fini, est le nombre d'élément de cet ensemble.

Exemple 1 : Soit U = {1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6} l'univers associé à l'épreuve "jet de dé". Supposons que le dé soit pipé de telle façon que $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = 2p_5 = 3p_6$ Calculons la probabilité d'obtenir un résultat pair lorsqu'on lance ce dé.
La probabilité est de $^{14}/_{29}$.

III Variable aléatoire

Définition : Définir une variable aléatoire X, c'est associer à chaque événement élémentaire $\{\omega_i\}$ d'une épreuve, un nombre x_i.
Une variable aléatoire est donc une fonction de U dans R (et non une variable).
L'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire X se note X(U).
L'événement " X prend la valeur x_i " est noté $(X = x_i)$.
Si une probabilité a été définie sur l'ensemble des éventualités, on note $p_i = =(X = x_i)$ la probabilité de $\{\omega_i\}$.

Définition : On appelle **loi de probabilité** de X l'application qui à tout élément x_i de X(U) associe la probabilité p_i de l'événement $(X = x_i)$.
Il est commode de présenter cette loi de probabilité sous forme de tableau :

Valeurs de X	x_1	x_2	……	x_n
$p(X = x_i)$	p_1	p_2	……	p_n

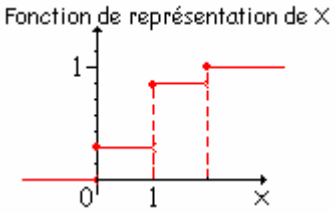
Les évènements $(X = x_i)$ .... $(X = x_n)$ sont disjoints et leur réunion est égale à U, donc
$p(U) = 1 = p(X=x_1) + \ldots + p(X = x_n)$
$(X = x_i)$ ....$(X = x_n)$ sont les évènements élémentaires de la loi de probabilité de X.

Exemple 2 : Une urne contient 3 boules rouges et 4 boules blanches. On tire 2 boules au hasard et simultanément. On gagne 1F par boule rouge tirée. On peut tirer 0, 1 ou 2 boules rouges, et donc gagner 0, 1 ou 2F. Désignons par X la somme gagnée. Donner la loi de probabilité de X.
On écris tous les cas : ici : 21 cas de probabilités 1/21 chacun.
X = 0 : probabilité d'obtenir 2 blanches : $P(X=0) = {}^{6}/_{21} = {}^{2}/_{7}$
X = 1 : probabilité d'obtenir 1 rouge & 1 blanche : $P(X=1) = {}^{12}/_{21} = {}^{4}/_{7}$
X = 2 : probabilité d'obtenir 2 rouges : $P(X=2) = {}^{3}/_{21} = {}^{1}/_{7}$

X	*$x_1 = 0$*	*$x_2 = 1$*	*$x_3 = 2$*	
$P(X=x_i)$	*2/7*	*4/7*	*1/7*	*1*

Définition : Lorsqu'à tout réel x, on associe la probabilité de l'événement "obtenir une valeur inférieure ou égale à x" on définit la **fonction de répartition** de X. On note $F(x) = p(X \leq x)$.
F est définie sur **R** à valeurs dans [0 ; 1]. La fonction de répartition correspond aux fréquences cumulées croissantes d'une variable statistique discrète. C'est une fonction croissante en escalier.

F(x) = 0 sur]-∞ ; 0[
F(x) = 2/7 sur [0 ; 1]
F(x) = 6/7 sur [1 ; 2]
F(x) = 1 sur [2 ; +∞[



Exemple 3 : Donner la fonction de répartition de l'exemple précédent.
Accepteriez-vous pour avoir le droit de jouer à ce jeu de verser 1F ?
Avec la formule du dessous :
$E(x) = 0 \times {}^{2}/_{7} + 1 \times {}^{4}/_{7} + 2 \times {}^{1}/_{7} = {}^{6}/_{7} < 1$
Le jeu est défavorable envers le joueur, il n'est pas raisonnable d'y jouer.

Définition : Soit une variable aléatoire X prenant les valeurs $x_1, \ldots, x_n$ avec les probabilités $p_1, \ldots, p_n$. On appelle **espérance mathématique** de X le nombre E(X) défini par :

$$E(X) = x_1 p_1 + \ldots + x_n p_n = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

Ce nombre correspond à la moyenne arithmétique d'une série statistique. Un jeu est **équitable** lorsque l'on a E(X) égale à la mise du joueur.

Définition : Soit une variable aléatoire X prenant les valeurs $x_1, \ldots, x_n$ avec les probabilités $p_1, \ldots, p_n$. On appelle **variance** de X le nombre V(X) défini par :

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i \times [x_i - E(X)]^2 = \left[\sum_{i=1}^{n} p_i (x_i)^2\right] - [E(x)]^2 = E(X^2) - [E(X)]^2$$

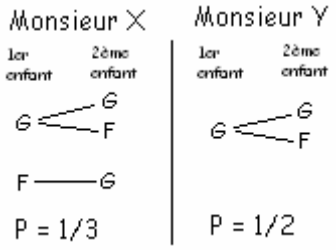
On appelle **écart-type** de X la racine carré de la variance: $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Exemple 4 : Calculer la variance et l'écart-type avec l'exemple précédent.
$V(x) = P_1[x_1 - E(x)^2] + P_2[x_2 - E(x)^2] + P_3[x_3 - E(x)^2]$
$V(x) = {}^{140}/_{343} = {}^{20}/_{49}$
$\sigma(x) = \sqrt{20/49} = \frac{2\sqrt{5}}{7} \approx 0.64$

Remarque : Comme pour une série statistique, l'espérance mathématique est un paramètre de position et l'écart type est un paramètre de dispersion qui caractérise l'étalement de la variable aléatoire autour de son espérance mathématique.

IV Probabilités conditionnelles

Exemple 5 : Monsieur X dit "J'ai deux enfants et l'un au moins des deux est un garçon". Monsieur Y dit : "J'ai deux enfants et l'aîné est un garçon". Quelle est dans chaque cas la probabilité pour que la famille comporte deux garçons ? (A défaut de précisions, on suppose les différentes possibilités équiprobables).



Définition : Soit U un univers, A et B deux évènements tels que $p(B) \neq 0$. On appelle **probabilité conditionnelle de A sous l'hypothèse B** (la probabilité pour que A se réalise sachant que B est réalisé) le réel noté p(A/B) ou encore $P_B(A)$ défini par $P_B(A) = {}^{p(A \cap B)}/_{p(B)}$
On en déduit: $p(A \cap B) = p_B(A) \times p(B) = p(B \cap A) = P_A(B) \times p(A)$

Exemple 6 : Reprendre l'exemple précédent.

Pour X :
B : l'un au moins est un garçon : $\frac{3}{4}$

A : Les 2 sont des garçons
$A \cap B$: 2 garçons : $A \cap B = A$; $P(A \cap B) = {}^1/_4$
$P_B(A) = {}^{1/4}/_{3/4} = {}^1/_3$.

Pour Y :
B : l'aîné est un garçon
A : avoir 2 garçons
$A \cap B = A$
$P(A \cap B) = {}^1/_4$
$P_B = \frac{1}{2}$
$P_B(A) = {}^{1/4}/_{1/2} = \frac{1}{2}$

V Evènements indépendants

Remarque : Intuitivement deux évènements A et B sont indépendants si la réalisation ou la non réalisation de l'un n'influe pas sur la réalisation ou la non réalisation de l'autre. C'est à dire si A et B sont des évènements tels que $p(B) \neq 0$, la probabilité de A est égale à la probabilité de A sachant B : $p_B(A) = p(A)$ soit :
$p(A) = {}^{p(A \cap B)}/_{p(B)}$ d'où $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$.

Définition : Deux évènements sont **indépendants** si et seulement si $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$.

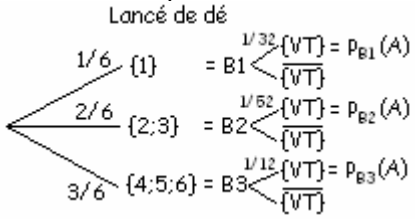
Exemple 7 : Une urne contient 7 boules rouges et 3 vertes.
1 expérience: On tire une boule puis une deuxième sans avoir remis la première.
2 expérience : On tire une boule on la remet on procède à un deuxième tirage d'une boule.
Calculer dans chaque cas la probabilité de tirer une verte puis une rouge.
Première expérience : 1) : 10 cas possibles 2) 9 cas possibles Nb de tirages de 2 boules : 90 tirages
A :"1 V au 1)" : $P(A) = {}^3/_{10}$ B :"1 R au 2)" : $P(B) = {}^7/_{10}$ $P(A \cap B) = {}^{21}/_{90}$
(R ; R) = 42 cas ; (V ; R) = 21 cas, soit 63 cas au total.
$P(A) \times P(B) = 3/10 \times 7/10 = 21/100$ $P(A) \times P(B) \neq P(A \cap B)$ A et B sont dépendants
Deuxième expérience :De même : on obtient A et B indépendants.

VI Formules des probabilités totales

Définition : k évènements d'une épreuve, B_1, B_2,……, B_k forment une partition de l'univers U lorsque ces évènements sont deux à deux incompatibles (d'intersection deux à deux vide) et lorsque leur réunion est égale à l'univers tout entier.

Théorème : Si les évènements B_1, B_2,……, B_k forment une partition de l'univers U, la probabilité d'un événement A quelconque est $p(A) = p(A \cap B_1) + p(A \cap B_2) + \ldots\ldots + p(A \cap B_k)$
Comme $p(A \cap B) = p(B) \times p_B(A)$, on obtient: $p(A) = p(B_1) \times P_{B1}(A) + \ldots\ldots + p(B_k) \times p_{Bk}(A)$

Exemple 8 : On lance un dé bien équilibré.
Si le résultat est 1, on tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes.
Si le résultat est 2 ou 3, on tire une carte au hasard dans un jeu de 52 cartes.
Si le résultat est 4, 5 ou 6, on tire une carte au hasard parmi les 12 figures d'un jeu de cartes.
Quelle est la probabilité de tirer le valet de trèfle?



A : obtenir un valet de trèfle
$A = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup (A \cap B_3)$
$A = P_{B1}(A) \times P(B_1) + P_{B2}(A) \times P(B_2) + P_{B3}(A) \times P(B_3)$

Remarque : La formule des probabilités totales s'utilise généralement lorsque deux étapes s'enchaînent et que le résultat de la seconde dépend du résultat de la première. On repère alors la partition qui décrit la première étape et on applique la formule des probabilités totales.