# LOIS DE PROBABILITE

## I Dénombrement

### 1) Listes

Définition : Une liste de p éléments d'un ensemble E à n éléments est une suite ordonnée $(a_1, a_2, \ldots, a_p)$ de p éléments appartenant à E (avec répétitions possibles).

Théorème : Soit n et p deux entiers naturels non nuls. Le nombre listes de p éléments d'un ensemble à n éléments est $n^p$.

Exemple 1 : Le numéro gagnant d'une loterie est désigné en faisant tourner trois roues divisées en secteurs numérotés de 1 à 5. Combien y a-t-il de résultats possibles ? (L'usage d'un arbre même incomplet aide à comprendre)

*$n = 5$ ; $p = 3 \to n^p = 5^3 = 125$ résultats possibles.*

Exemple 2 : Tirer successivement et avec remise 3 boules dans une urne qui en contient 5. Combien y a-t-il de tirages possibles ?

*$n = 5$ ; $p = 3 \to n^p = 5^3 = 125$ tirages possibles.*

Exemple 3 : On lance un dé cubique 4 fois de suite. Combien peut-on obtenir de résultats distincts ?

*$n = 6$ ; $p = 4 \to n^p = 6^4 = 1296$ résultats distincts.*

### 2) arrangement

Définition : Un arrangement de p éléments d'un ensemble E à n éléments est une liste de p éléments **distincts** de E (sans possibilité de répétition).

Théorème : Soit E un ensemble non vide à n éléments et p un entier tel que $1 \leq p \leq n$. Dans E, le nombre d'arrangements à p éléments est $\mathbf{n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-p+1)}$.

Exemple 4 : Parmi les cinq moyens de transport ci-dessous, citez dans l'ordre les trois que vous préférez utiliser

1) train ; 2) autocar ; 3) voiture personnelle ; 4) métro ; 5) taxi ;

Combien y a-t-il de réponses possibles à ce questionnaire?

*$5 \times 4 \times 3 = 60$ réponses possibles.*

Exemple 5 : Vingt chevaux, numérotés de 1 à 20, prennent le départ de la course. Les parieurs essaient de deviner le tiercé dans l'ordre. Combien y a-t-il de choix possibles en supposant qu'il n'y aura pas d'ex aequo ?

*$20 \times 19 \times 18 = 6840$ tiercé possibles.*

Cas particulier : Un arrangement des n éléments d'un ensemble E à n éléments est appelé permutation des éléments de E.

Le nombre de permutations d'un ensemble à n éléments est $\mathbf{n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (1)}$.

n! s'appelle "factorielle n".

Par convention : $0! = 1$

Exemple 6 : Une revue propose à ses lecteurs une liste de 4 chanteurs et leur demande un classement par ordre de préférence. Combien y a-t-il de réponses possibles?

*$4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ réponses possibles.*

### 3) Combinaison

Définition : Une combinaison à p éléments d'un ensemble E à n éléments est une partie à p éléments de E (une partie de E étant un ensemble, on ne tient pas compte de l'ordre).

Théorème : Soit E un ensemble non vide à n éléments et p un entier tel que $1 \leq p \leq n$. Le nombre de combinaisons à p éléments de E est noté $\binom{n}{p}$ et ce lit p parmi n.

On a donc : $\boxed{\binom{n}{p} = \dfrac{n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots\ldots \times (n-p+1)}{p \times (p-1) \times (p-2) \times \ldots\ldots \times (1)} = \dfrac{n!}{(n-p)! \times p!}}$

(Même nombre de facteurs au numérateur qu'au dénominateur).

Démonstration : Pour obtenir toutes les listes de p éléments deux à deux distincts d'un ensemble E de n éléments, nous procédons en deux étapes:

- Choix d'une partie de E à p éléments: il y a $\binom{n}{p}$ possibilités.
- Classement des p éléments : il y a p! possibilités.

Il y a donc $\binom{n}{p}$ x p! listes de p éléments deux à deux distincts. D'où $\binom{n}{p}$ x p! = **n x (n–1) x (n–2) x … x (n–p+1)**.

Exemple 7 : Au jeu du Loto, on tire chaque semaine six numéro parmi les entiers compris entre 1 et 49. Si on appelle tirage une suite de six éléments distincts de l'ensemble des 49 premiers entiers non nuls, c'est à dire la donnée dans l'ordre d'apparition des six numéros tirés, combien y a-t-il de tirages distincts possibles?

*49 x 48 x 47 x 46 x 45 x 44 = 1 .10^10^.* $49 \times 48 \times 47 \times 46 \times 45 \times 44 = 1 \cdot 10^{10}$.

Le tirage supposé (par ordre d'apparition des numéros) est (21 ; 10 ; 7 ; 45 ; 3 ; 19). Combien y a-t-il de permutations de l'ensemble de ces six nombres {21 ; 10 ; 7 ; 45 ; 3 ; 19} ?

$6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$

Si on appelle résultat l'ensemble des six numéros tirés, combien de tirages conduisent au même résultat ? *6!*

Combien y a-t-il de grilles distinctes au Loto ?

$$\frac{49\times 48\times 47\times 46\times 45\times 44}{6!} = \frac{49!}{6!\times 43!} = 13\ 983\ 816$$

Exemple 8 : De combien de manière peut-on choisir 3 chevaux parmi 20 sans tenir compte de l'ordre?

$$\frac{20\times 19\times 18}{3!} = \frac{20!}{3!\times 17!}$$

Exemple 9 : Une assemblée de 37 personnes élit un bureau de 4 membres. Combien y a-t-il de bureaux possibles ?

$$\binom{37}{4} = \frac{37!}{4!\times 33!} = \frac{37\times 36\times 35\times 34}{4\times 3\times 2}$$

4) Résumé

Les différentes façons de tirer p boules dans une urne qui en contient n :

| Tirages | Successifs (l'ordre compte) | Simultanés (l'ordre ne compte pas) |
|---|---|---|
| Avec remise | $n^p$ listes | |
| Sans remise | **n x (n–1) x (n–2) x … x (n–p+1)** arrangements | $\binom{n}{p}$ combinaisons |

Exemple 10 : Un sac contient 9 boules numérotées de 1 à 9.

a) On tire 3 boules successivement en remettant à chaque fois la boule tirée dans le sac avant de tirer la suivante. On écrit côte à côte chacun des 3 chiffres tirés dans l'ordre du tirage. Combien peut-on former de nombres à 3 chiffres ? *$9^3$ = 729 tirages*

b) On procède au tirage de 3 boules successivement mais sans remise. On place les boules côte à côte dans l'ordre du tirage. Combien peut-on former de nombres à 3 chiffres ? *9 x 8 x 7 = 504 tirages*

c) On procède au tirage de 3 boules simultanément. Combien peut-on obtenir de résultats différents ?

*9!/3! x 6! = 84 tirages.*

Exemple 11 :

1) En informatique, un «bit » (binary digit) vaut soit O soit 1. Un ("octet" est une suite de 8 bits. Combien existe-t-il d'octets différents ? *$2^8$ = 256 octets différents.*

2) Une agence de voyages soumet à ses clients une liste de 8 villes. Elle propose de choisir un circuit de 5 villes parmi ces 8, en indiquant l'ordre de visite des 5 villes choisies. Combien y a-t-il de circuits possibles ?

*8 x 7 x 6 x 5 x 4 = 6720*

L'agence de voyages propose également à ses clients une formule « liberté » pour laquelle le touriste choisit 5 villes sans préciser l'ordre dans lequel ces villes seront visitées. Dénombrer les formules « liberté» proposées par l'agence. *8!/5! x 3! = 56*

5) Propriétés des $\binom{n}{p}$

Propriété : 1) $\binom{n}{1} = n$ ; $\binom{n}{n} = 1$ ; $\binom{n}{0} = 1$

2) $0 \le p \le n$ $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$ (Dans un ensemble E à n éléments, choisir une partie F à p éléments revient à choisir la partie complémentaire $\overline{F}$ qui à n-p éléments.

Par exemple : $\binom{27}{25} = \binom{27}{2} = \dfrac{27 \times 26}{2}$

3) $1 \le p \le n-1$ $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}$ (soit un ensemble E à u éléments, e est un élément de E. Les parties de E a p éléments sont de deux sortes : celles qui contiennent e, elles sont formées de e et de (p-1) éléments pris parmi (n-1), il y en a donc $\binom{n-1}{p-1}$ et celles qui ne contiennent pas e, elles sont formées de p éléments choisis parmi n-1, il y en a $\binom{n-1}{p}$).

6) Formule du binôme de Newton

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^{n-p}.b^p = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}.b + \binom{n}{2} a^{n-2}.b^2 + ...... + \binom{n}{n-1} a.b^{n-1} + b^n$$

Ex :

$$(a+b)^3 = a^3 + \binom{3}{1} a^2 b + \binom{3}{2} ab^2 + b^3$$
$$= a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a+b)^5 = a^5 + \binom{5}{1} a^4 b + \binom{5}{2} a^3 b^2 + \binom{5}{3} a^2 b^3 + \binom{5}{4} ab^4 + b^5$$
$$= a^5 + 5a^4 b + 10a^3 b^2 + 10a^2 b^3 + 5ab^4 + b^5$$

Triangle de Pascal :

| n \ p | 0 | 1 | 2 | p-1 | p |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | $\binom{0}{0}$ | | | | |
| 1 | $\binom{1}{0}$ | $\binom{1}{1}$ | | | |
| 2 | $\binom{2}{0}$ | $\binom{2}{1}$ | $\binom{2}{2}$ | | |
| n-1 | | | | $\binom{n-1}{p-1}$ | $\binom{n-1}{p}$ |
| n | | | | | $\binom{n}{p}$ |

# II Exemple de lois discrète

## 1) La loi de Bernoulli

Définition : On appelle **épreuve de Bernoulli** une expérience aléatoire qui admet uniquement **deux** issues possibles appelées généralement succès et échec et notées respectivement S et $\overline{S}$ de probabilités respectives p et q, avec p + q = 1.

Exemple 12 : On lance une pièce de monnaie équilibrée, il y a deux issues possibles :
Pile(p= $\frac{1}{2}$) ou Face (q= $\frac{1}{2}$).

Définition : Soit une épreuve de Bernoulli d'issues contraires S (probabilité p) $\overline{S}$ (probabilité q) et X la variable aléatoire à valeurs dans {0 ; 1} définie ainsi:

$$X = \begin{cases} 1 \text{ si l'issue de l'épreuve est } S \\ 0 \text{ si l'issue de l'épreuve est } \overline{S} \end{cases}$$

Par définition, la loi de probabilité de la variable aléatoire X est appelée **loi de Bernoulli de paramètre p**.
On a **E(X) = p** et **V(X) = p x q**

## 2) La loi binomiale

La répétition n fois d'une **même épreuve élémentaire à deux issues**, lorsque les résultats des expériences successives sont **indépendants** les uns des autres, correspond à un **schéma de Bernoulli**.

Soit k le nombre de succès au cours des n épreuves, k est un entier naturel compris entre 0 (n échecs) et n (n succès). Notons p(k) la probabilité de l'événement Ak: "obtenir k succès exactement au cours des n épreuves".
Un événement élémentaire favorable au sens de Ak est une suite de n résultats comportant k succès et (n-k) échecs. Ak est la réunion de tous les évènements élémentaires de ce type et la probabilité d'un tel événement élémentaire est $p^k(1-p)^{n-k}$.
Il y a autant d'évènements élémentaires distincts que de façons de répartir les k succès parmi les n essais, C'est-à-dire $\binom{n}{k}$ ; on a donc : $p(k) = \binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k}$.
La somme de toutes les probabilités p(k) est égale à 1 d'après la formule du binôme :

$$\sum_{k=0}^{n} p(k) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} .pk(1-p)^{n-k} = [p+(1-p)]^n = 1.$$

Propriété : Soit une suite de n épreuves de Bernoulli avec pour chaque épreuve la probabilité p de succès,
La probabilité p(k) d'obtenir k succès au cours de ces n épreuves est $\boxed{p(X-k) = \binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k}}$ avec $0 \leq k \leq n$.

La variable aléatoire X à valeurs dans {0 ; 1 ; … ; n} → [0 ; 1]

$k \mapsto p(X-k) = \binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k}$ est appelée **loi binomiale de paramètre n et p**.

Remarque : Il est fondamental de savoir reconnaître un processus de Bernoulli et d'en dégager les paramètres.
Les trois conditions ci-dessous doivent être remplies **simultanément** :
1) répétition d'une **même** épreuve élémentaire.
2) l'épreuve élémentaire a **deux** issues exactement.
3) les résultats aux différentes épreuves sont **indépendants** les uns des autres.
Les paramètres caractéristiques sont alors
n : le nombre de répétitions de l'épreuve élémentaire
p : la probabilité de succès au cours d'une épreuve élémentaire.

Exemple 13 : Une urne contient quatre boules blanches et six boules noires. On tire au hasard une boule de cette urne. On répète l'expérience 5 fois de suite en remettant après chaque les la boule tirée dans l'urne ; les résultats aux différents tirages sont indépendants les uns des autres.
Soit A l'évènement "obtenir exactement trois boules blanches au cours des cinq tirages". Calculer $p(A_3)$.
*Epreuve de Bernoulli : "tirer une boule parmi 10"*
*S = "obtenir 1 blanche" ; $\overline{S}$ = "obtenir une noire"*
*p = P(S) = 4/10 = 0.4 ; q = 1 - p = P($\overline{S}$ ) = 0.6*
*Schéma de Bernoulli : On répète l'épreuve 5 fois donc n = 5 de façon identique → indépendante. On a un schéma de Bernoulli : p = 0.4 ; n = 5*
*$A_3$ : "on obtient 3 boules blanches sur les 5 épreuves.*

$$P(A_3) = \binom{5}{3} \times p^3 \times (1-p)^{5-3} = \binom{5}{3} \times 0.4^3 \times 0.6^2 = 0.2304$$

Exemple 14 : Trente-quatre élèves se présentent à un examen. On suppose que la réussite de chaque élève est indépendante de celle des autres et que la probabilité de réussite pour un élève est de p=0.8. Quelle est la probabilité pour que trente élèves au moins soient reçus ?

*Epreuve de Bernoulli : "choix d'un élève parmi 34" p = 0.8*

*Schéma de Bernoulli : paramètres : n = 34, p = 0.8*

*E : "X ≥ 30"*

*E = (X = 30) U (X = 31) U (X = 32) U (X = 33) U (X = 34)*

*P(E) : P(X = 30) U ... U P(X = 34)*

*S évenement disjoint*

$P(X=30)=\binom{34}{30}\times 0.8^{30}\times 0.2^{4}=0.0918$ $P(X=32)=0.0177$

$P(X=33)=0.0043$ P(E) = 0.1617

$P(X=31)=\binom{34}{31}\times 0.8^{31}\times 0.2^{3}=0.0474$ $P(X=34)=0.0005$

Propriété : L'expérience mathématique et la variance d'une variable aléatoire associée à une loi binomiale B(n , p) sont: E(X) = np et V(X) = np(1-p).

Exemple 15 : Une étude statistique portant sur plusieurs années a montré que, dans une certaine population, la fréquence de naissance d'une fille est 0,45. On suppose que le sexe d'un enfant à la naissance ne dépend pas du sexe de l'enfant précédent. On s'intéresse au nombre de filles dans les familles de 5 enfants.

a) Etudier la loi de probabilité de la variable X égale au nombre de filles dans ces familles. Dresser un tableau de valeurs pour cette loi et une représentation graphique. Quelle est la valeur de X la plus probable dans ces familles? *F : "avoir une fille" ; G : "avoir un garçon". P(F) = 0.45 ; P(G) = 0.55. X ∈ {0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5}.*

$P(X=k)=\binom{5}{k}\times(0.45)^{k}\times(0.55)^{5-k}$ $0\le k\le 5.$

*P(X = 0) = 0.050. P(X = 1) = 0.205. P(X = 2) = 0.337. P(X = 3) = 0.275. P(X = 4) = 0.112. P(X = 5) = 0.018*

b) Calculer E(X), V(X) et σ(X). *E(X) = 5 x 0.45 = 2.25 ; V(X) = 5 x 0.45 x (1-0.45) = 1.238. σ(X) = 1.112.*

3) Les lois continues

Jusqu'à présent, chaque expérience aléatoire conduisait à un univers fini et chaque variable aléatoire prenait un nombre fini de valeurs. Mais il arrive aussi que les issues d'une expérience ou les valeurs prises par une variable aléatoire puissent être n'importe quel nombre d'un intervalle I de R. Les évènements sont alors du type "obtenir un nombre compris entre a et b". La définition d'une loi P sur un intervalle I repose donc sur la notion de probabilité d'un intervalle quelconque de I.

Définition : Soit I un intervalle de R.

On appelle **densité de probabilité sur I** toute fonction f définie sur I vérifiant les trois conditions suivantes

- f est continue sur I
- f est positive sur I
- l'aire située sous la courbe $C_f$ est égale à 1 unité d'aire

On définit la **loi de probabilité P de densité f sur l'intervalle I** en associant à tout intervalle [a ; b] inclus dans I le réel P([a ; b]) = $\int_a^b f(x)dx$ . On dit aussi que P est une loi continue sur I

Remarque : P(I) = 1 et P({$x_0$}) = 0 (car $\int_{x_0}^{x_0} f(t)dt=0$ )

Définition : On dit qu'une variable aléatoire X à valeurs dans I suit une loi de probabilité P si P(a ≤ X ≤ x) = $\int_a^b f(t)dt$ pour tout x de [a ; b].

La fonction de répartition F est alors définie sur [a ; b] par F(x) = P(X ≤ x) = $\int_a^x f(t)dt$ F est dérivable sur I et F' = f

a) La loi uniforme

Définition : On appelle **loi uniforme** sur I = [a ; b] la loi de probabilité P dont la densité f est la fonction constante sur I égale à $\frac{1}{b-a}$

La probabilité d'un intervalle J = [$\alpha$ ; $\beta$] inclus dans I est alors $\frac{\beta-\alpha}{b-a} = \frac{\text{longueur de J}}{\text{longueur de I}}$

Remarque : La loi uniforme généralise au continu ce que la loi équirépartie (les n valeurs de la variable aléatoire ont toutes la même probabilité 1/n) est au discret.

Exemple 16 : la variable X est la variable continue uniforme sur [0 ; 1]

a) Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :

A : (X =0.5) ; B : (0.1 < X < 0.3) ; C : (0,2 < X < 0,99) *P(A) = 0 ; P(B) = P(]0.1 ; 0.3[) = P([0.1 ; 0.3]) ) 0.3-0.1/1-0 = 0.2 ; P(C) = P(]0.2 ; 0.99[) = P([0.2 ; 0.99]) = 0.79*

b) Calculer $P_C(B)$ et $P_B(C)$ *$P_C(B)$ : probabilité d'avoir 0.1 < x < 0.3 sachant que 0.2 < X < 0.99*

*$P_C(B) = P(B \cap C)/P(C)$ ; $P(B \cap C)$ = 0.3 – 0.2/1-0 = 0.1 donc $P_C(B)$ = 0.1/0.2 = ½.*

Exemple 17 : On choisit au hasard un nombre réel x dans l'intervalle [0 ; 10]. Quelle est la probabilité pour que x soit solution de l'inéquation $x^2-4x+3 > 0$ ?

*$x \in [0 ; 10]$ ; A : " x solution de $x^2 - 4x + 3 > 0$".*

*P(A) ? f(x) = 1/10 on résout $x^2 - 4x + 3 > 0$. $0 < x < 1$ ($A_1$) ou $3 < x < 10$($A_2$). A = $A_1$ U $A_2$.*

*$P(A) = P(A_1) + P(A_2)$ ; $P(A_1) = P(0 \le x < 1)$ = 1-0/10-0 = 1/10. P(X = 6) = $\binom{10}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^6\left(\frac{1}{2}\right)^4 = 0.205$*

b) Loi exponentielle

La durée de vie d'un appareil est une variable aléatoire X prenant ses valeurs dans $R^+$. Si l'on suppose que cette durée de vie ne dépend pas du temps pendant lequel l'appareil a déjà fonctionné (**on dit que la durée de vie est sans vieillissement**), on démontre que la loi de probabilité de X admet une densité f de la forme $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ avec $\lambda > 0$.

Définition : On appelle **loi exponentielle de paramètre $\lambda$** la loi continue admettant pour densité la fonction f définie sur $R^+$ par $f(x)= \lambda e^{-\lambda x}$ ou $\lambda$ est un réel positif fixé.

Pour cette loi, la probabilité d'un intervalle [$\alpha$ ; $\beta$] inclus dans $R^+$ est égale à : $P([\alpha;\beta]) = \int_\alpha^\beta \lambda e^{-\lambda x}dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_\alpha^\beta$

Pour cette loi, la probabilité d'un intervalle [c ; +∞] avec $c \ge 0$ est égale à : $P([c;+\infty]) = 1 - \int_0^c \lambda e^{-\lambda x}dx$

Exemple 18 : On suppose que le tirage d'un nombre réel t dans $R^+$ suit une loi exponentielle de paramètre 1. Quelle est la probabilité que t soit solution de l'inéquation : $x^2-4x+3 > 0$

*E : "t solution de $x^2 - 4x + 3 > 0$" P(E) ?*

*$x^2 - 4x + 3 > 0 \Leftrightarrow x < 1$ ou $< > 3$ $\qquad F(t) = e^{-t}$*

*$\Leftrightarrow x \in [0 ; 1[ \cup ]3 ; +\infty[$*

*E ($x \in [0 ; 1 [ \cup [ 3 ; +\infty[$) $\Leftrightarrow (0 \le x <1)=E_1 \cup ( x \ge 3)=E_2$*

*$P(E) = P(E_1) + P(E_2)$ ;*

$$P(E_1) = \int_0^1 e^{-t}dt = \left[-e^{-t}\right]_0^1 = -e^{-1} + e^0 = 1 - \frac{1}{e}$$

$$P(E_2) = 1 - P(0 \le x \le 3)\ ;\ P(0 \le x \le 3) = \int_0^3 f(t)dt = \left[-e^{-t}\right]_0^3 = -e^{-3} + 1\ ;\ P(E_2) = 1 - (-e^{-3} + 1) = e^{-3}$$

$$P(E) = 1 - \frac{1}{e} + \frac{1}{e^3}$$

Propriété : pour une variable aléatoire X qui suit une loi de exponentielle de paramètre $\lambda$, la fonction de répartition F est donnée par : $F(X) = P(X \le x) = 1-e^{-\lambda x}$ avec $x \ge 0$ et $\lambda > 0$.

$= P(0 \le X \le x) = \int_0^x f(t)dt = \left[-e^{-\lambda t}\right]_0^x = \ldots$

Propriété : L'espérance mathématique et la variance d'une variable aléatoire associée à une loi exponentielle de paramètre $\lambda$ sont **E(X) = 1/$\lambda$** et **V(X) = 1/$\lambda^2$**.