ELEMENTS DE SYMETRIE D'UNE COURBE

Dans tout ce qui suit, f désigne une fonction définie sur un ensemble Df et représenté par une courbe C dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

I Fonctions paires – Fonctions impaires

1) f est **paire** SSI, pour tout x de Df,

- $(-x) \in Df$ (1)
- f (-x) = f (x) (ou f (x) – f (-x) = 0) (2)

C admet l'axe $(O, \vec{j})$ pour axe de symétrie.

2) f est **impaire** SSI, pour tout x de Df,

- $(-x) \in Df$ (1)
- f (-x) = - f (x) (ou f (x) + f (-x) = 0) (2)

C admet l'origine O du repère pour **centre de symétrie**.

Remarques :
- La condition (1) peut se traduire par : « f est symétrique par rapport à zéro ».
- La majorité des fonctions ne sont ni paires ni impaires.
- Seule la fonction nulle est à la fois paire et impaire.

II Changement de repère

Soit I un point de coordonnée (a ; b) dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et $(I, \vec{i}, \vec{j})$ un deuxième repère du plan.

Soit M un point quelconque du plan, de coordonnées M (x ; y) dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et M (X ; Y) dans $(I, \vec{i}, \vec{j})$.

Pour tout M du plan, on a $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \overrightarrow{\mathrm{OI}} + \overrightarrow{\mathrm{IM}}$ c'est à dire $x\,\vec{i} + y\,\vec{j} = a\,\vec{i} + b\,\vec{j} + X\,\vec{i} + Y\,\vec{j}$ on en déduit :
$x = a + X$ et $y = b + Y$ (Formule du changement de repère).

C admet y = f (x) pour équation dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On cherche une équation de la forme Y = g (X), g étant une fonction généralement différente de f.

$$M \in C \Leftrightarrow y = f(x) \text{ et } x \in Df$$
$$\Leftrightarrow Y + b = f(a + X) \text{ et } (a + X) \in Df$$
$$\Leftrightarrow Y = g(x) \text{ et } X \in Df$$
$$(\text{avec } g(X) = f(a + X) - b)$$

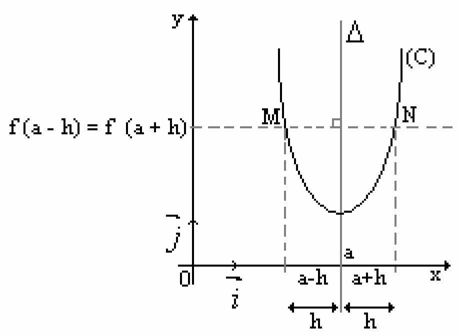
III Axe de symétrie parallèle à l'axe $(O, \vec{j})$

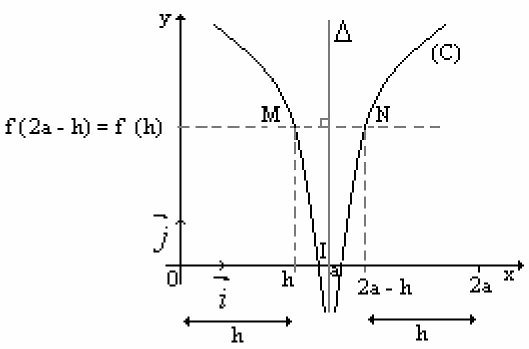
Soit Δ la droite d'équation x = a ; Δ est un axe de symétrie de C lorsque :

1) $f(a+h) = f(a-h)$ pour tout h tel que (a + h) et (a – h) soient élément de Df

2) $f(2a-h) = f(h)$ pour tout h tel que (2a + h) et h soient élément de Df

3) Dans un repère $(I, \vec{i}, \vec{j})$ avec I (a ; 0) (c'est-à-dire : $\overrightarrow{OI} = a.\vec{i}$) C admet pour équation Y = g (X), où g est une équation paire.





(schémas avec h > 0)

IV Centre de symétrie

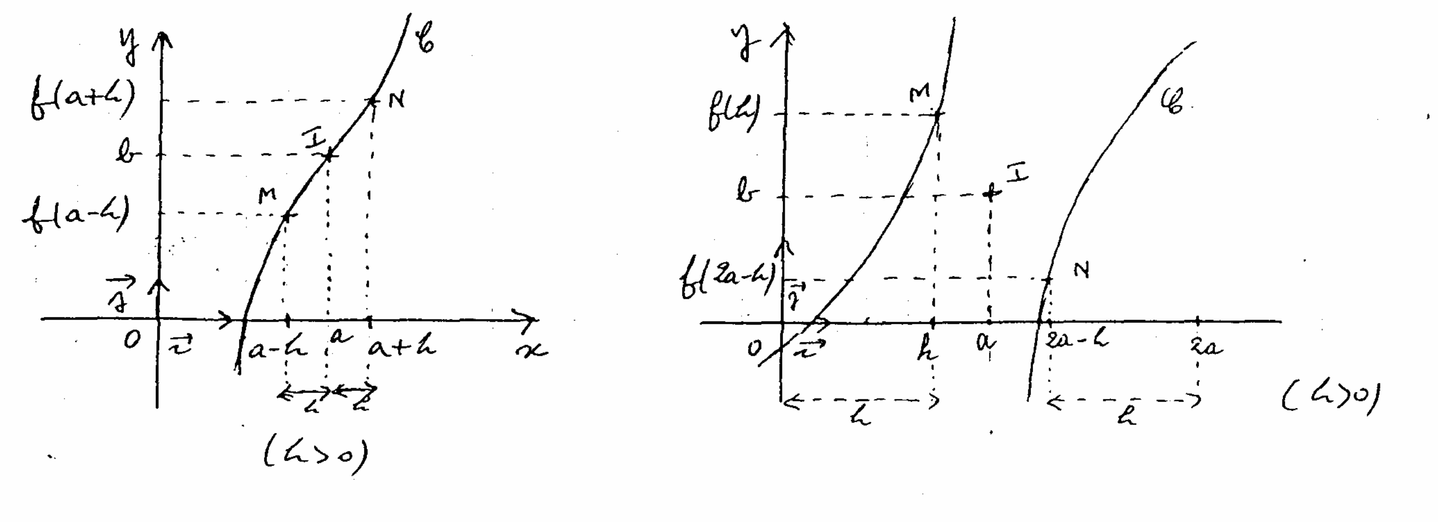
Soit I (a ; b), a et b étant des constantes :

I (a ; b) est centre de symétrie de C lorsque :

1) $\dfrac{f(a+h)+f(a-h)}{2}=b$ pour tout h tel que (a + h) et (a – h) soient élément de Df

2) $\dfrac{f(2a-h)+f(h)}{2}=b$ pour tout h tel que h et (2a – h) soient élément de Df

3) Dans un repère $(I, \vec{i}, \vec{j})$ avec I (a ; b) (c'est-à-dire $\overrightarrow{OI}=a.\vec{i}+b\vec{j}$) C admet pour équation Y = g (X) où g est une fonction <u>Impaire.</u>



I est milieu de [MN]