DROITES ET PLANS DE L'ESPACE

Rappels sur les barycentres :

G barycentre du système (A,a)(B,b)(C,c)(D,d) avec $a + b + c + d \neq 0$ Signifie :

¤ $a.\overrightarrow{GA} + b.\overrightarrow{GB} + c.\overrightarrow{GC} + d.\overrightarrow{GD} = \vec{0}$

¤ Pour tout M : $a.\overrightarrow{MA} + b.\overrightarrow{MB} + c.\overrightarrow{MC} + d.\overrightarrow{MD} = (a+b+c+d).\overrightarrow{MG}$

H le barycentre partiel de (A,a) et (B,b) G est le barycentre de (H,a+b),(C,c) et (D,d)

I Caractérisation barycentrique

1) Droites et segment dans l'espace

Dans l'espace, comme en géométrie plane, la droite (AB) est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}$, t décrivant R, et le segment [AB] est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}$, t décrivant l'intervalle [0 ; 1].

a) **La droite** (AB) est l'ensemble des points M qui sont les barycentres de (A, 1 - t), (B, t) avec **t réel quelconque**.
b) **Le segment** [AB] est l'ensemble des points M qui sont les barycentres de (A, 1 - t), (B, t) avec **t réel quelconque dans [0 ; 1]**.

Démonstration : Pour tout réel t, dire que M est le barycentre (A, 1 - t), (B, t) équivaut à dire que :

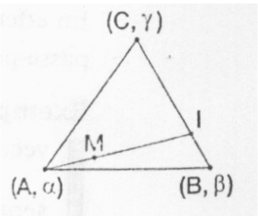
$\overrightarrow{AM} = \dfrac{1}{(1-t)+t}\overrightarrow{AB} = t\overrightarrow{AB}$. Ainsi :

¤ la droite (AB) est l'ensemble des barycentres de (A, 1 - t), (B, t) lorsque t décrit R ;

¤ [AB] est l'ensemble des barycentres de (A, 1 - t), (B, t) lorsque t décrit [0 ; 1].

Remarque Le segment [AB] est aussi l'ensemble de tous les barycentres de (A, α),
(B, β) avec $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$ et $\alpha + \beta \neq 0$.
En effet, le barycentre M de (A, α), (B, β) est aussi barycentre de (A, $\alpha/\alpha+\beta$), (B, $\beta/\alpha+\beta$), donc de (A, 1-t), (B,t) avec t = $\beta/\alpha+\beta$ tel que $0 \leq t \leq 1$. Donc :

L'intérieur d'un triangle ABC est l'ensemble des barycentres de (A, α), (B, β), (C, γ) avec $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$.



En effet, lorsque M est un tel barycentre, notons I le barycentre de (B, β), (C, γ) ; alors I est sur [BC] et d'après le théorème d'associativité, M est le barycentre de (A, α), (I, $\alpha+\beta$).
Puisque $\alpha > 0$ et $\beta + \gamma > 0$, M est sur]AI[et donc M est intérieur au triangle ABC.
Réciproquement, si M est un point intérieur à ABC, la droite (AM) coupe (BC) en I, entre B et C ; il existe $\beta > 0$, $\gamma > 0$ tels que I est barycentre de (B, β), (C, γ).
Or M est sur]AI[, donc il existe un réel $\alpha > 0$ tel que M est barycentre de (A, α), (I, $\beta+\gamma$) et d'après le théorème d'associativité, M est le barycentre de (A, α), (B,β), (C,γ).

2) Plans dans l'espace

Rappelons que le plan (ABC) est l'ensemble des points M tels que

$\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$ [1] x et y étant des réels quelconques.

"M appartient au plan (ABC)" équivaut à "Il existe deux réels x et y tel que M est le barycentre de (A, 1 – x - y), (B, x), (C,y)".

Démonstration : L'égalité [1] s'écrit $\overrightarrow{AM} = x(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}) + y(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MC})$, soit $(1 - x - y)\overrightarrow{MA} + x\overrightarrow{MB} + y\overrightarrow{MC} = \vec{0}$. Puisque $(1 - x - y) + x + y \neq 0$, cela équivaut à dire que M est le barycentre de (A, 1 - x - y), (B, x), (C, y).

II Représentation paramétriques

1) Paramétrage d'une droite

Supposons que la droite d est définie par la donnée d'un point A(x_0 ; y_0 ; z_0) et d'un vecteur directeur $\vec{u}$ (a ; b; c).
La relation d'appartenance du point M(x ; y ; z) à cette droite : « il existe un réel t tel que $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$ », se traduit analytiquement par : il existe un réel t tel que $\begin{cases} x - x_0 = at \\ y - y_0 = bt \\ z - z_0 = ct \end{cases}$ »

D'où le théorème :

La droite d passant par le point **A (x_0 ; y_0 ; z_0)** et dirigée parle vecteur $\vec{U}$ **(a ; b; c)** est l'ensemble des points M (x ; y ; z) tels que :

$$(S)\ \begin{cases} x = at + x0 \\ y = bt + y0\ ,\ t \in R \\ z = ct + z0 \end{cases}$$

Le système (S) est appelé **une représentation paramétrique** de la droite d dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et on dit que t est le **paramètre**.
On dit aussi que (S) est un **système d'équations paramétriques** de d.
À chaque réel t, on associe un point M (at + x_0 ; bt + y_0 ; ct + z_0) et un seul de d ; réciproquement, â chaque point M de d correspond un unique réel t tel que $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$.
Remarque : Lorsqu'une représentation paramétrique d'une droite d est écrite sous la forme (S), alors on peut affirmer que le vecteur $\vec{u}$ (a ; b ; c) est un vecteur directeur de d et que le point A(x_0 ; y_0 ; z_0) appartient à d.
En effet, si on écrit la représentation paramétrique de la droite dirigée par $\vec{u}$ et qui passe par A, on trouve (S).
Exemple : Lorsque A (1 ; 2 ; -1) et B (3 ; 1 ; -1), le vecteur $\overrightarrow{AB}$ (2 ; -1 ; 0) est un vecteur directeur de la droite (AB), et dans le repère utilisé, (AB) a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = -t + 2\ ,\ t \in R \\ z = -1 \end{cases}$$

2) Paramétrage d'un segment, d'une demi-droite

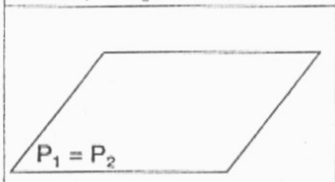
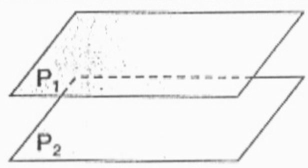
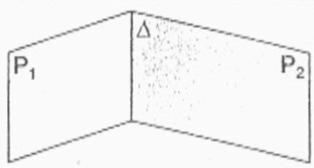
A et B sont deux points distincts de l'espace on note $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$. L'appartenance d'un point M au segment [AB] ou bien à la demi-droite [AB) d'origine A passant par B s'obtient en adaptant l'énoncé du théorème précèdent :
1) pour le segment [AB] il suffit de remplacer dans le système (S) «t ∈ R » par « t∈ [0 ; 1] ».
2) pour la demi-droite [AB) il suffit de remplacer dans le système (S) « t ∈ R » par « t ∈ [0 ; +∞[».

III Intersections de plans et droites

Dans tout ce paragraphe, l'espace est muni d'un **repère orthonormal** $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1) Intersection de deux plans P_1 et P_2

P_1 et P_2 ont pour équations $a_1 + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ et $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$. On peut savoir a priori s'ils sont sécants ou parallèles scion que leurs vecteurs normaux sont colinéaires ou non (voir chapitre 14, page 387). En particulier, lorsqu'ils sont sécants, pour trouver les coordonnées de leurs points d'intersection, on résout le système formé par leurs deux équations. Ce système possède alors une infinité de solutions qui sont représentées par les points de la droite Δ, intersection de P_1 et P_2 Le tableau suivant résume les différentes positions de P_1 et P_2 et indique l'ensemble des solutions du système (S) : $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$

P_1 et P_2 confondus	P_1 et P_2 disjoints	P_1 et P_2 sécants
		
(S) admet pour solution tout triplet (*x* ; *y* ; *z*) solution de l'équation [1] (ou [2]).	(S) n'a pas de solution.	Δ n'est pas définie paramétriquement ; Δ est l'ensemble des points M(*x* ; *y* ; *z*) tels que (*x* ; *y* ; *z*) sont les solutions de (S).

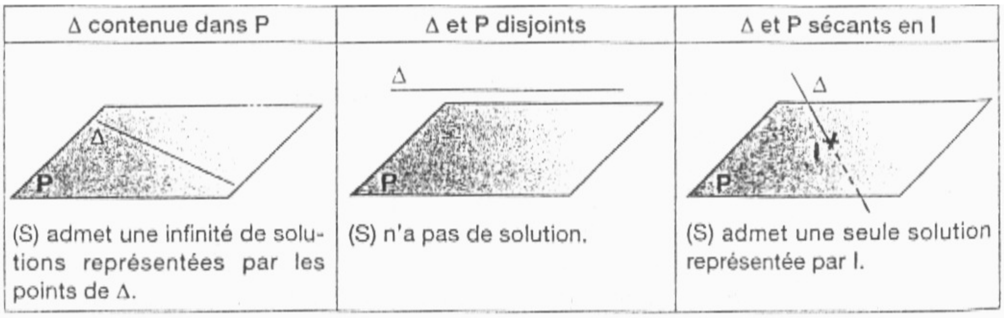
2) Intersection d'un plan P et d'une droite Δ

P a pour équation ax + by + cz + d = 0 et donc pour vecteur normal $\vec{n}$ (a ; b ; c) ; Δ est dirigée par le vecteur $\vec{u}$ (α ; β ; γ) et passe par le point A(x_0 ; y_0 ; z_0).
On peut savoir a priori si Δ est parallèle ou bien sécante à P suivant que $\vec{u}$ est orthogonal ou non à $\vec{n}$ (voir chapitre 14, page 388).

En particulier, si Δ coupe P, les coordonnées de leur point d'intersection I est le triplet (x ; y ; z) solution du

système (S) : $\begin{cases} x = \alpha t + x0 \\ y = \beta t + y0 \\ z = \gamma t + z0 \\ ax + by + cz + d = 0 \end{cases}$

Le tableau ci-dessous, résume les diverses situations :



IV Intersection de trois plans

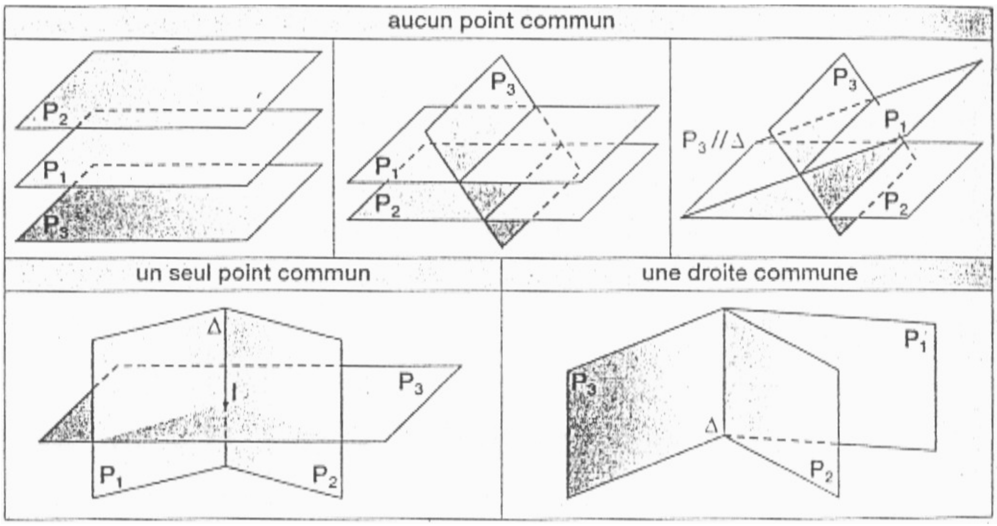
Dans tout ce paragraphe, l'espace est muni d'un **repère orthonormal** $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

1) Intersection de trois plans P_1, P_2 et P_3

Notons que si deux plans sont confondus, l'étude de l'intersection des trois plans se ramène à celle de deux plans, qui a été faite au paragraphe III 1).

Dès lors, nous supposerons que les trois plans sont distincts deux à deux. Pour déterminer leur intersection, une idée est d'examiner d'abord l'intersection $P_1 \cap P_2$ des plans P_1 et P_2, **puis** de considérer l'intersection de $P_1 \cap P_2$ avec P_3 en utilisant le paragraphe III 2) dans le cas où $P_1 \cap P_2$, est une droite Δ.

Les différents cas sont résumés dans le tableau suivant.



2) Interprétation algébrique

P_1, P_2 et P_3 sont les plans d'équations respectives :

$a_1 + b_1y + c_1z + d_1 = 0$, $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$, $a_3x + b_3y + c_3z + d_3 = 0$.

L'étude de l'intersection des trois plans revient à résoudre le système linéaire de trois équations à trois inconnues :

$$(S)\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \\ a_3x + b_3y + c_3z + d_3 = 0 \end{cases}$$

Le tableau résume les diverses situations illustrées page précédente et indique l'ensemble des solutions du système (S).

intersection de P_1, P_2, P_3	ensemble des solutions de (S)
aucun point commun	vide
un seul point commun I	un seul triplet $(x ; y ; z)$, celui des coordonnées de I
droite Δ (Δ est définie par deux des trois équations)	tous les triplets $(x ; y ; z)$ solutions des deux équations définissant Δ
plan (cas où $P_1 = P_2 = P_3$)	tous les triplets $(x ; y ; z)$ solutions de l'une des équations