LIMITES ET ASYMPTOTES

I Cas d'une asymptote verticale (parallèle à l'axe des ordonnés)

Lorsque $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ ou $-\infty$ (ou a^+ ou a^-, a étant un réel)

Dans ce cas, la courbe admet une asymptote d'équation : x = a

Exemple :

$$f(x) = \frac{3x-5}{x-2}$$

$$\lim_{x \to 2}(3x-5) = 1$$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$x-2$		$-$	0	$+$	

¤ $\lim_{x \to 2^+}(x-2) = 0^+$ donc $\lim_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$

¤ $\lim_{x \to 2^-}(x-2) = 0^-$ donc $\lim_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$

La courbe admet une asymptote d'équation x = 2.

II Cas d'une asymptote horizontale (parallèle à l'axe des abscisses)

Lorsque $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l \text{ (réel)}$, la courbe admet une asymptote d'équation y = l au voisinage de $+\infty$.

Lorsque $\lim_{x \to -\infty} f(x) = l \text{ (réel)}$, la courbe admet une asymptote d'équation y = l au voisinage de $-\infty$.

Exemple :

$$\mathrm{f(x)} = \frac{3\mathrm{x}-5}{\mathrm{x}-2}$$

f est une fonction rationnelle donc :

(1) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{3x}{3} = \lim_{x \to +\infty} 3 = 3$

(2) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} 3 = 3$

La courbe admet une asymptote d'équation y = 3 au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$.

III Cas d'une asymptote oblique

Lorsque f(x) peut s'écrire sous la forme $\boxed{f(x) = ax + b + h(x)}$

Avec $\lim_{\substack{x \to +\infty \\ ou -\infty}} h(x) = 0$

Alors, la courbe admet une asymptote d'équation y = ax + b au voisinage de $+\infty$ ou de $-\infty$.

Ex1 :

$$f(x) = 2x + 5 + \frac{3}{x-1}$$

$$f(x) = ax + b + h(x) \text{ avec } ax + b = 2x - 5 \text{ et } h(x) = \frac{3}{x-1}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to +\infty} 3 = 3 \\ \lim_{x \to +\infty}(x-1) = +\infty \end{array}\right\} \lim_{x \to +\infty} \frac{3}{x-1} = \lim_{x \to +\infty} h(x) = 0$$

La courbe admet une asymptote d'équation y = 2x – 5 en $+\infty$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to -\infty} 3 = 3 \\ \lim_{x \to -\infty}(x-1) = -\infty \end{array}\right\} \lim_{x \to -\infty} \frac{3}{x-1} = \lim_{x \to -\infty} h(x) = 0$$

La courbe admet une asymptote d'équation y = 2x – 5 en $-\infty$.

Ex2 :

$$f(x) = -x + 3 + \frac{2x}{x^2 - 1}$$

$$f(x) = ax + b + h(x) \text{ avec } ax + b = -x + 3 \text{ et } h(x) = \frac{2x}{x^2 - 1}$$

$$\lim_{x \to -\infty} h(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{2x}{x^2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2}{x} = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} h(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{x} = 0$$

h est une fonction rationnelle donc :
La courbe admet une asymptote d'équation y = -x + 3 en $-\infty$ et en $+\infty$.

Remarque :
Une asymptote parallèle à l'axe des abscisses est un cas particulier d'asymptote oblique.
Elle a pour équation y = ax + b avec a = 0

$$f(x) = \frac{3x - 5}{x - 2} = \frac{3x - 6 + 1}{x - 2} = \frac{3(x-2)}{x-2} + \frac{1}{x-2} = 3 - \frac{1}{x-2}$$

$$\lim_{x \to +\infty} h(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x-2} = 0 \text{ et } \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x-2} = 0 \text{ d'où l'asymptote d'équation } y = 3 \text{ en } +\infty \text{ et en } -\infty\text{, obtenue en II}$$

IV Position de la courbe par rapport à une asymptote oblique ou horizontale (non parallèle à l'axe des ordonnées)

(ou tout autre droite non parallèle à l'axe des ordonnées)

Soit C, une courbe d'équation y = f(x) ; Δ, une droite d'équation y = ax + b
On étudie le signe de **f(x) – (ax+b)**

- Si **f(x) – (ax+b) = 0 ,** C et Δ ont un **point en commun**.
- Si **f(x) – (ax+b) > 0 ,** C est **au dessus de** Δ.
- Si **f(x) – (ax+b) < 0 ,** C est **en dessous de** Δ.

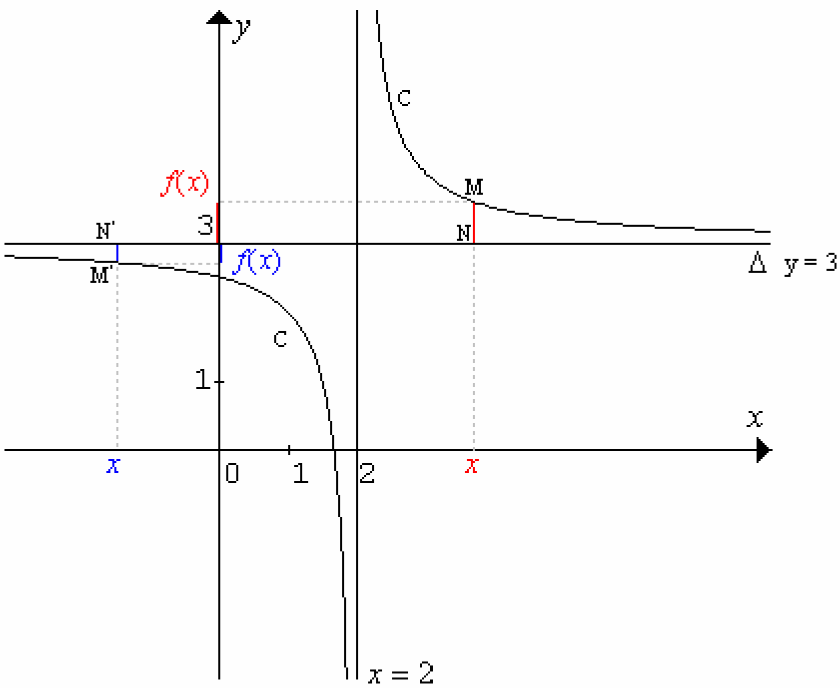
Ex 1 :

$$f(x) = \frac{3x - 5}{x - 2}$$

C d'équation $y = \frac{3x - 5}{x - 2}$ et Δ d'équation y = 3.

$$f(x) - 3 = \frac{3x - 5}{x - 2} - 3 = \frac{(3x - 5) - (x - 2)}{x - 2} = \frac{1}{x-2}$$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$x - 2$	$-$	0	$+$
$\frac{1}{x-2}$	$-$	‖	$+$
position relative	C en dessous de Δ	‖	C au dessus de Δ



Ex 2 :

$$f(x) = -x+3+\frac{2}{x^2-1} \quad \text{Df} = R/\{-1;1\}$$

C d'équation y = f(x)

Δ d'équation y = -x + 3

$$f(x)-(-x+3) = \frac{2x}{x^2-1}$$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$2x$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
x^2-1		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$h(x)$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	
position relative		C au dessous de Δ		C au dessus de Δ		C au dessous de Δ		C au dessus de Δ	

C et Δ ont un point en commun : A (0 ; 3).

Remarque : cette méthode permet de positionner 2 courbes :
C d'équation y = f(x), et C' d'équation y = g(x).

Le signe de f(x) – g(x) permet de situer C' par rapport à C.

V Complément

Méthode par identification :

Ex :

$$f(x) = \frac{x^2-4x+6}{x-3}, x \in R/\{3\}$$

Déterminer a, b, c réels tels que : $f(x) = ax+b+\frac{c}{x-3}$ pour tout $x \neq 3$

$$ax+b+\frac{c}{x-3} = \frac{(ax+b).(x-3)+c}{x-3} = \frac{ax^2+bx-3ax-3b+c}{x-3} = \frac{ax^2+(b-3a)x+(-3b+c)}{x-3}$$

Par identification des coefficients des termes de même degré, on obtient le système :

$$\begin{cases} a=1 \\ b-3a=-4 \\ -3b+c=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=3a-4=-1 \\ c=3b+6=3 \end{cases}$$

Conclusion : pour tout $x \neq 3$: $f(x) = x-1+\frac{3}{x-3}$

Méthode par division de polynômes :

$$\begin{array}{r|l} x^2-4x+6 & x-3 \\ \cline{2-2} \underline{(x^2-3x)} & x-1 \\ -x+6 & \\ \underline{(-x+3)} & \\ 3 & \end{array}$$

$$x^2-4x+6 = (x-3)\times(x-1)+3$$

$$\frac{x^2-4x+6}{x-3} = (x-1)+\frac{3}{(x-3)}$$

Théorèmes de comparaison :

Soit f, g, h, trois fonction définies au voisinage de a, a étant réel ou infini.

(1) Si f(x) $\leq$ g(x) au voisinage de a et si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$. Alors : $\lim\limits_{x \to a} g(x) = +\infty$.

(2) Si f(x) $\leq$ g(x) au voisinage de a et si $\lim\limits_{x \to a} g(x) = -\infty$. Alors : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$.

(3) Théorème des gendarmes :

Si f(x), g(x), h(x) → f(x) ≤ g(x) ≤ h(x) au voisinage de a et si $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = l$. Alors : $\lim_{x\to a} g(x) = l$.

(4) Si $|f(x) - l| \leq g(x)$ au voisinage de a et si $\lim_{x\to a} g(x) = 0$. Alors : $\lim_{x\to a} f(x) = l$.

Exemple : n°50 p 30 ou :

$f(x) = \dfrac{2x + \sin x}{x - 1}$, $x \in]1 ; +\infty[$

a) démontrer que pour tout réel x > 1, on a $\dfrac{2x-1}{x-1} \leq f(x) \leq \dfrac{2x+1}{x-1}$

b) Vérifier que pour tout réel $x \neq 1$, $\dfrac{2x-1}{x-1} = 2 + \dfrac{1}{x-1}$ et $\dfrac{2x+1}{x-1} = 2\dfrac{3}{x-1}$

Voir Exo I.