

LIMITE D'UNE FONCTION COMPOSEE

Définition :

$$x \xrightarrow{f} f(x) \xrightarrow{g} g[f(x)] = g \circ f(x)$$

$$y \xrightarrow{g} g(y)$$

Théorème :

a, l, l' sont réels ou infinis. f est définie au voisinage de a .
 g est définie au voisinage de l

si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ et si $\lim_{y \rightarrow l} g(y) = l'$
 Alors: $\lim_{x \rightarrow a} (g \circ f)(x) = l'$

Ex 1 :

$$f(x) = \sqrt{4x-2}$$

$$Df = [\frac{1}{2}; +\infty]$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x):$$

$$x \xrightarrow{u} 4x-2 \xrightarrow{v} \sqrt{4x-2}$$

$$y \mapsto \sqrt{y}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} (4x-2) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{y} = +\infty \end{array} \right\} \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{4x-2} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 7} f(x):$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 7} (4x-2) = 26 \\ \lim_{x \rightarrow 26} \sqrt{y} = \sqrt{26} \end{array} \right\} \lim_{x \rightarrow 7} \sqrt{4x-2} = \sqrt{26}$$

Ex 2 :

$$f(x) = \left(\frac{2x+1}{x-3} \right)^5$$

$$Df = \mathbb{R} \setminus \{3\}$$

$$x \xrightarrow{u} \frac{2x+1}{x-3} \xrightarrow{v} \left(\frac{2x+1}{x-3} \right)^5$$

$$y \mapsto y^5$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x):$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+1}{x-3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x} = 2 \text{ (car } u \text{ est rationnelle)}$$

$$\lim_{y \rightarrow 2} y^5 = 2^5$$

$$\text{donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2^5$$

$\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

Etude de $f(x)$ quand x tend vers 3

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$x-3$	-	0	+

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 3} (2x+1) = 7 \\ \lim_{x \rightarrow 3^-} (x-3) = 0^- \end{array} \right\} \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2x+1}{x-3} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y^5 = -\infty$$

$$\text{d'où } \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -\infty$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 3} (2x+1) = 7 \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} (x-3) = 0^+ \end{array} \right\} \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2x+1}{x-3} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y^5 = +\infty$$

$$\text{d'où } \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = +\infty$$