# CONTINUITE
# RESOLUTION DE L'EQUATION f(x) = K

## I Continuité d'une fonction

### 1) Définition :

- Soit f définie sur un intervalle I contenant a. f est continue en a SSI $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$
- f est continue sur l'intervalle I SSI f est continue pour toute valeur de a

Remarque : f est continue en a lorsque :

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$

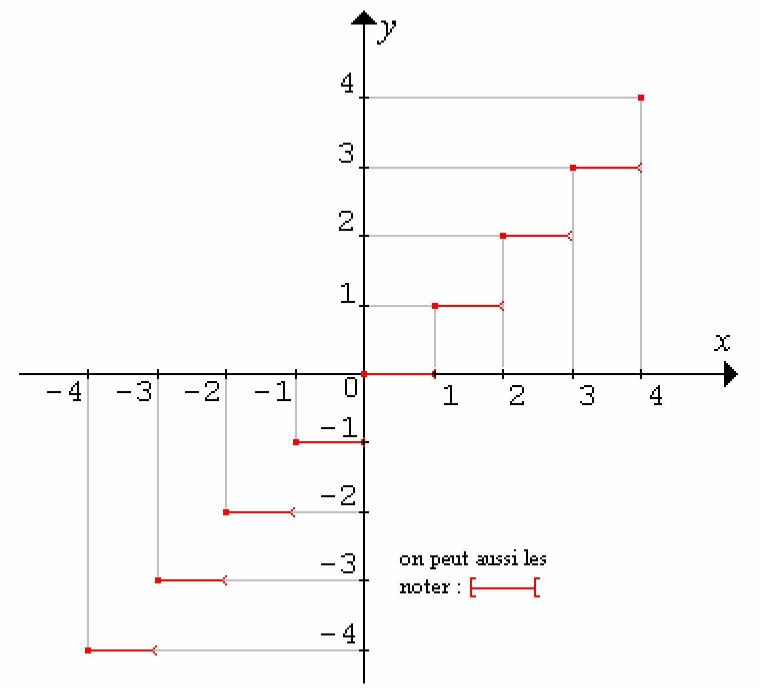
### 2) Exemples :

E(x), partie entière de x :

Pour tout x de R, il existe un entier relatif n et un seul tel que $n \leq x \leq n+1$. La fonction E définie par E(x) = n s'appelle fonction partie entière.

| | | |
|---|---|---|
| $3 \leq 3.2 < 4$ | $-5 \leq -4.15 < -4$ | $4 \leq 4 < 5$ |
| $E(3.2) = 4$ | $E(-4.15) = -5$ | $E(4) = 4$ |

- Définir la fonction E pour $x \in [-4 ; 4]$.
- Représenter E pour $x \in [-4 ; 4]$.
- Etudier la continuité en a = 2 et a = 1.




Si $x \in [-4 ; -3]$, E(x) = -4

Si $x \in [-3 ; -2]$, E(x) = -3

Si $x \in [-2 ; -1]$, E(x) = -2

.....

Si $x \in [3 ; 4]$, E(x) = 3

En a = 2

[1 ; 2], E(x) = 1

[2 ; 3], E(x) = 2

$\lim_{x \to 2^-} E(x) = 1$ $\qquad$ $\lim_{x \to -1^-} E(x) = -2$

$\lim_{x \to 2^+} E(x) = 2$ $\qquad$ $\lim_{x \to -1^+} E(x) = -1$

Donc la fonction n'est pas continue en x = 2 ni en x = -1 mais elle est continue à droite de $2^+$ et de $-1^+$ :

$\lim_{x \to 2^+} E(x) = E(2)$ ; $\lim_{x \to -1^+} E(x) = E(-1)$

La fonction est discontinue pour toutes les valeurs entières.

### 3) Continuité et fonction usuelles

a) si f et g sont définies sur un intervalle I contenant a :

si f et g sont continues en a, alors f + g, f x g, $\alpha$ f (où $\alpha$ est une constante), $\frac{f}{g}$ ( si $g(a) \neq 0$ ) sont continue en a.

b) Si f et g sont continus sur I, alors f + g, f x g, $\frac{f}{g}$ $g(x) \neq 0$ pour tout x de I sont continue sur I.

c) Conséquences :

Les fonctions polynômes et les fonctions rationnelles sont continues sur tout l'intervalle de leur ensemble de définition ainsi que les fonctions sinus et cosinus.

d) la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur l'intervalle [0 ; $+\infty$ [

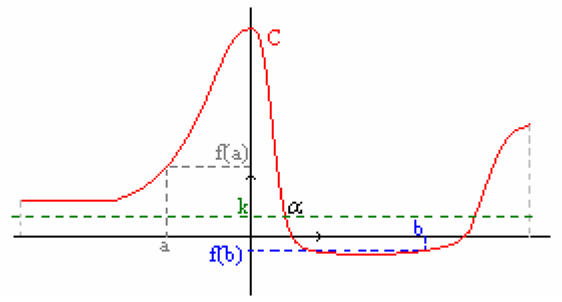
e) Les fonctions composées à l'aide des fonctions polynômes, rationnelles, sinus, cosinus, et racines sont continues sur tout l'intervalle de leur ensemble de définition.

$x \mapsto \sqrt{4-3x}$ : définit sur :$]-\infty\ ;\ \frac{4}{3}]$

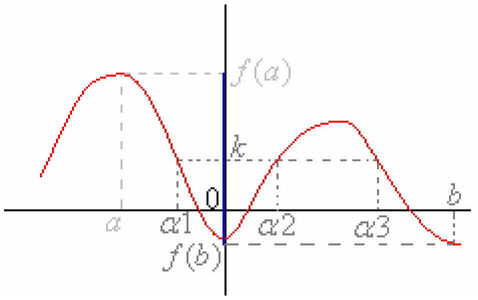
## II Théorème des valeurs intermédiaires

Enoncé : sois f une fonction définie et continue sur un intervalle I contenant les réels a et b.

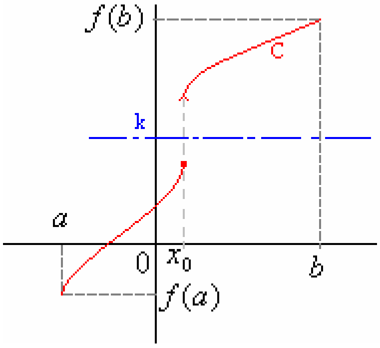
Alors : quel que soit k compris entre f(a) et f(b), il existe au moins une valeur $\alpha$ comprise entre a et b telle que f( $\alpha$ ) = k.




Il existe $\alpha$ , compris entre a et b tel que f( $\alpha$ )=k.




$f(\alpha 1) = f(\alpha 2) = f(\alpha 3) = k$



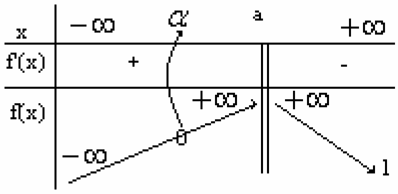

F discontinue en $x_0$. Il existe des réels k entre f(a) et f(b) qui n'ont aucun antécédents entre a et b.

## III Fonction continues et strictement monotone sur un intervalle

1) Soit une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle [a ; b], alors :
Quelque soit k strictement compris entre f(a) et f(b), il existe un réel $\alpha$ unique dans ]a ; b[ tel que f( $\alpha$ ) = k.
(ce qui signifie : "l'équation f(x) = k admet une solution unique $\alpha$ dans ]a ; b[ ").

2) Plus généralement, soit f est définie, continue et strictement monotone sur un intervalle I. Soit l et l' réels ou infinis, les limites de la fonction aux bornes de I, alors : quelque soit k strictement compris entre l et l', il existe $\alpha$ unique dans I tel que f( $\alpha$ ) = k.
L'équation f(x) = k admet une solution unique $\alpha$ dans I.

3) Résolution d'une équation




f est continue et strictement croissante sur $]-\infty\,;a[$
f est continue et strictement décroissante sur $]a\,;+\infty[$

Equation f(x) = 0

(1) f continue et strictement croissante sur $]-\infty\,;a[$

avec $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = +\infty$

(2) f continue et strictement décroissante sur $]a\,;+\infty[$

avec $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$

quelque soit x > a, f(x) $\geq 1$.
➔l'équation f(x) = 0 n'a pas de solution dans $]a\,;+\infty[$ .

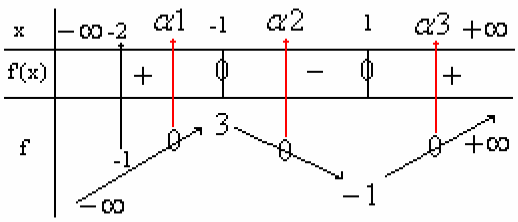
Conclusion : l'équation f(x) = 0 admet une seule solution dans Df, telle que $\alpha$ < a.

Pour f(x) = 2 : (avec le même développement)
(1) $\alpha 1$, solution de f(x) = 2 dans $]-\infty\,;a[$
(2) $\alpha 2$, solution de f(x) = 2 dans $]a\,;+\infty[$
Conclusion : l'équation f(x) = 2 à deux solutions : $\alpha 1$ et $\alpha 2$ tel que $\alpha 1$< a et $\alpha 2$ > a.

Cette méthode est utilisée quand on n'a pas d'autres moyens plus simples pour résoudre d'équation.

4) valeur approchée des solutions de f(x) = k

Ex : f(x) = $x^3$ - 3x + 1
On cherche à résoudre l'équation f(x) = 0
On étudie f. f est une fonction polynôme définie et dérivable sur R avec f'(x) = 3x² - 3 = 3(x + 1).(x – 1)
Signe de f'(x), et variations de f :




$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$

f(-1) = 3
f(1) = -1

b) Equation f(x) = 0

¤ Sur $]-\infty\,;-1]$, f est continue et strictement croissante avec $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et f(-1) = 3.

Or $0\in]-\infty\,;3[$ donc il existe une valeur unique $\alpha 1$ telle que $\alpha 1 \leq$ -1 et f($\alpha 1$) = 0

¤ Sur [-1 ; 1], f est continue et strictement décroissante avec f(-1) = 3 et f(1) = -1.

Or $0\in]-1;3[$ donc il existe une valeur unique $\alpha 2$ telle que f($\alpha 2$)=0 et $-1\leq\alpha 2\leq 1$

¤ Sur $[1;+\infty[$ , f est continue et strictement croissante avec $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et f(1) = -1.

Or $0\in]-1;+\infty[$ donc il existe une valeur unique $\alpha 3$ telle que f($\alpha 3$) = 0 et $1\leq\alpha 3$.

En conclusion, on a trois valeurs : $\alpha 1\leq$ -1, $-1\leq\alpha 2\leq 1$, et $1\leq\alpha 3$.

c) valeur approchée des solutions

Deux méthodes

- Méthode par balayage

Pour $\alpha 1$ :

$\alpha < -1$

$\left.\begin{array}{l} f(-2) = -1 \\ f(-1) = 3 \end{array}\right\} \ 0 \in ]-1;3[ \text{ donc } -2 < \alpha 1 < -1$

$\left.\begin{array}{l} f(-1.9) \approx -0.16 \\ f(-1.8) \approx 0.57 \end{array}\right\} \ 0 \in ]-0.16;0.57[ \text{ donc } -1.9 < \alpha 1 < -1.8$

$\left.\begin{array}{l} f(-1.88) = -4.10^{-3} \\ f(-1.87) \approx 0.07 \end{array}\right\} \ 0 \in ]-4.10^{-3};0.07[ \text{ donc } -1.88 < \alpha 1 < -1.87$

$\left.\begin{array}{l} f(-1.880) = -4.10^{-3} \\ f(-1.879) = 2{,}9.10^{-3} \end{array}\right\} \ 0 \in ]-4.10^{-3};2{,}9.10^{-3}[ \text{ donc } -1.880 < \alpha 1 < -1.879$

- Méthode par dichotomie

Pour $\alpha 2$ :

$\left.\begin{array}{l} f(-1) = 3 \\ f(1) = -1 \end{array}\right\} \ 0 \in [-1;3] \text{ donc } -1 \leq \alpha 2 \leq 1$

$f(0) = 1 > 0$

$\left.\begin{array}{l} f(0.5) \approx -0.37 < 0 \\ f(0) = 1 > 0 \end{array}\right\} \text{ donc } 0 < \alpha 2 < 0.5$

$\left.\begin{array}{l} f(0.25) \approx 0.26 \\ f(0.5) \approx -0.37 \end{array}\right\} \text{ donc } 0.25 < \alpha 2 < 0.5$

$\left.\begin{array}{l} f(0.375) \approx -0.07 < 0 \\ f(0.25) \approx 0.26 > 0 \end{array}\right\} \text{ donc } 0.25 < \alpha 2 < 0.375$

Valeur approchée de $\alpha 3$ à $10^{-2}$ près

$\alpha 3 > 1$

$f(1) = -1$

$(2) = 3$

$\left.\begin{array}{l} f(1.53) \approx -0.01 < 0 \\ f(1.54) \approx 0.03 > 0 \end{array}\right\} \text{ donc } 1.53 < \alpha 3 < 1.54$

1.53 est une valeur approchée de $\alpha 3$ à $10^{-2}$ près par défaut.