DERIVATION

I Fonction dérivable en a

1) Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle contenant a
H est un réel tel que a + h $\in$ I

(1) On dit que f est dérivable en a lorsque :

$$\boxed{\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = l \text{ (réel)}}$$

Ceci équivaut à :

$$\boxed{\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = l \text{ (réel)}}$$

(2) l s'appelle le nombre dérivé de f en a. il se note f'(a)

Ex : f(x) = x^2 - 4   I = R
f est dérivable en x = 1 avec f'(1) = 2

f est dérivable en x = 3 avec f'(3) = 6

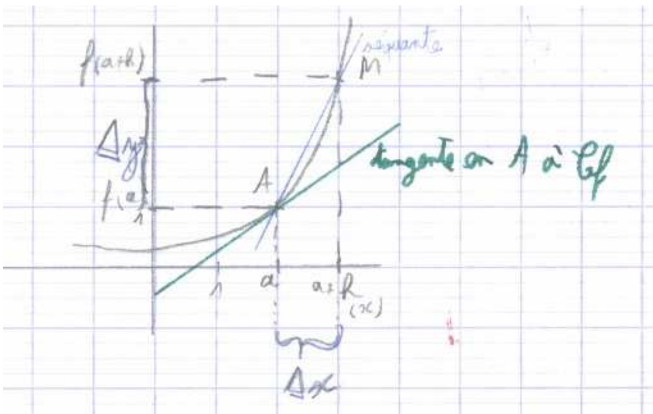
2) Continuité

Propriété :
Si une fonction est dérivable en a, alors elle est continue en a.

Une fonction continue en a n'est pas forcément dérivable en a.

3) Interprétation géométrique

Le nombre dérivé f'(a) est le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point AZ (a ; f(a))



4) Approximation affine au voisinage de a

Lorsque f est dérivable en a :
➔ f(a) + f'(a) x h est une approximation affine de f(a +h) au voisinage de a (h petit)
➔ f(a) + f'(a) x (x – a) est une approximation affine de f(x) au voisinage de a

5) Interprétation cinématique

Si f(t) définit la loi horaire d'un mouvement, f'(a) désigne la vitesse instantanée à l'instant a.

6) Notation différentielle

f dérivable en a

Lorsque f(x) – f(a) (Δy)et (x – a) (Δx) deviennent très petit : on note $\frac{dy}{dx}(a) = f'(a)$ ou $\frac{df}{dx}(a) = f'(a)$

Notation différentielle.

II Dérivabilité sur un intervalle

1) Définition

Soit f une fonction dérivable en toute valeur a d'un intervalle, alors f est dérivable sur l'intervalle, et on note f' la fonction dérivée.

2) Si f est dérivable sur un intervalle, alors elle est continue sur l'intervalle

3) Dérivées successives :

Si f dérivable sur l'intervalle, f' est sa dérivée
Si f' dérivable sur l'intervalle, f'' est sa dérivée
Si f'' dérivable sur l'intervalle, f''' est sa dérivée
$F^{(n)}$ désigne la dérivée $n^{ème}$ de f, pour n ≥ 3

III Règles de dérivation

Voir feuille

IV Dérivée et dérivation d'une fonction

1) Théorème :

Soit f définit et dérivable sur un intervalle I.

(1) Si f'(x) > 0 pour tous x de I (sauf éventuellement pour quelques valeurs isolées ou f'(x) = 0) alors f est strictement croissante sur I.
(2) Si f'(x) < 0 pour tout x de I (sauf éventuellement pour quelques valeurs isolées ou f'(x) = 0) alors f est strictement décroissante sur I.
(3) Si f'(x) = 0 pour tout x de I alors f est constante sur I.

2) Extremum local :

a) Maximum local :

f présente un maximum local en x_0, lorsqu'il existe un intervalle I contenu dans Df, et contenant x_0 tel que $f(x) \leq f(x_0)$ pour tout x de I.

b) Minimum local :

f présente un maximum local en x_0 lorsqu'il existe un intervalle I contenant dans Df, et contenant x_0 tel que $f(x) \geq f(x_0)$ pour tout x de I.

3) Théorème :

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I contenant x_0.

¤ Si f admet un extremum local f(x), alors f'(x) = 0.
¤ Si f'(x) = 0 et si f'(x) change de sens en x_0, alors $f(x_0)$ est un extremum local en x_0.

V Calcul des limites en utilisant la dérivabilité

Ex : $f(x) = \dfrac{\cos x - 1}{x}$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x)$

La fonction est dérivable sur R donc en 0 :

Avec : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x - \cos 0}{x - 0} = \cos'(0) = -\sin(0) = 0$

D'où : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$