LES PRIMITIVES

I Définition :

f est une fonction définie sur un intervalle I.

F est une fonction définie et dérivable sur I.

On dit que F est une primitive de f sur I lorsque $F'(x) = f(x)$ pour tout x de I (c'est-à-dire lorsque f est la dérivée de F).

Exemples :

a)	$f : x \mapsto x$	$F : x \mapsto \frac{1}{2}x^2$	$I = \mathbb{R}$
b)	$f : x \mapsto \sin x$	$F : x \mapsto -\cos x$	$I = \mathbb{R}$
c)	$f : x \mapsto \frac{1}{x^2}$	$F : x \mapsto -\frac{1}{x}$	$I =]-\infty\,;0[$ ou $I =]0\,;+\infty[$
d)	$f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$	$F : x \mapsto 2\sqrt{x}$	$I =]0\,;+\infty[$

II Existence d'une primitive d'une fonction :

Nous admettrons le théorème suivant :

« Toute fonction f continue sur un intervalle I admet une primitive sur I . »

Conséquence : Des Fonctions usuelles : polynômes, rationnelles, $x \mapsto \sqrt{x}$, $x \mapsto \sin x$, $x \mapsto \cos x$, $x \mapsto \tan x$, $x \mapsto e^x$, $x \mapsto \ln x$ ont des primitives sur tout intervalle de leur ensemble de définition.

Exercice : f est la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = x\sqrt{x}$.

a) Calculer $f'(x)$ pour $x > 0$.

b) Calculer $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x}$, en déduire que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = 0$

c) En déduire une primitive sur $[0\,;+\infty[$ de la fonction $g : x \mapsto \sqrt{x}$

III Ensemble des primitives d'une fonction :

1) Théorème :

Soit une fonction continue sur un intervalle I et admettant une primitive F sur I , alors :

- Quelle que soit la constante réelle c , la fonction G définie par $G(x) = F(x) + c$ est aussi une primitive de f sur I .
- Toutes les primitives de f sont de cette forme.

Exemples :

$$\left.\begin{array}{l} x \mapsto 3x^2 - 5x \\ x \mapsto 3x^2 - 5x + \sqrt{7} \\ x \mapsto 3x^2 - 5x - 12 \\ x \mapsto 3x^2 - 5x + \frac{3}{4} \end{array}\right\} \text{Sont les primitives de } f : x \mapsto 6x - 5 \text{ sur } \mathbb{R}$$

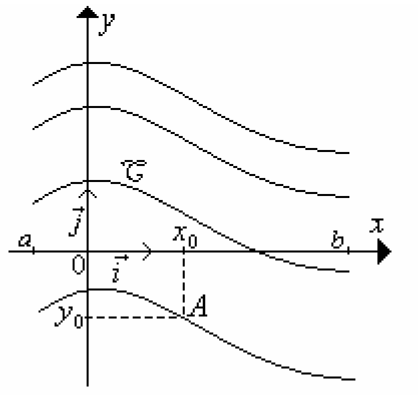
2) Primitives prenant une valeur donnée en x_0.

Théorème : f est la fonction admettant des primitives sur un intervalle I , x_0 est un réel de I , et y_0 un réel donné.

Alors il existe une unique primitive F de f sur I telle que $F(x_0) = y_0$

Remarque : En Physique, on parle de « condition initiale » .

3) Interprétation graphique :



$I = [a\,;b]$

- Si C représente une primitive F d'une fonction f sur I, alors les autres primitives de f (qui diffèrent de F d'une constante c) se déduisent de C par une translation de vecteur $c\vec{j}$
- Il existe une de ces courbes et une seule qui passe par un point donné $A(x_0\,;y_0)$

4) Exemples :

Soit $f : x \mapsto 3x^2 - 4x + 1$

Déterminons la primitive F de f (sur $\mathbb{R}$) telle que $F(2) = -1$. F est définit sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = x^3 - 2x + x + c$; $F(2) = -1$ donc $8 - 8 + 2 + c = -1$ d'où $c = -3$.

La fonction F cherchée est définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = x^3 - 2x + x + 3$.

IV Calcule des primitives :

1) Primitives usuelles :

a et c sont des constantes

fonctions f	fonctions primitives F	intervalles
$x \mapsto a$	$x \mapsto ax + c$	sur $\mathrm{I} = \mathbb{R}$
$x \mapsto x$	$x \mapsto \frac{1}{2}x^2 + c$	sur $\mathrm{I} = \mathbb{R}$
$x \mapsto x^n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$	$x \mapsto \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c$	sur $\mathrm{I} = \mathbb{R}$
$x \mapsto \frac{1}{x^2}$	$x \mapsto -\frac{1}{x} + c$	sur $]-\infty\,;0[$ ou sur $]0\,;+\infty[$
$x \mapsto \frac{1}{x^n}$ $(n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 2)$	$x \mapsto -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} + c$	sur $]-\infty\,;0[$ ou sur $]0\,;+\infty[$
$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$	$x \mapsto 2\sqrt{x} + c$	sur $]0\,;+\infty[$
$x \mapsto \sin x$	$x \mapsto -\cos x + c$	sur $\mathbb{R}$
$x \mapsto \cos x$	$x \mapsto \sin x + c$	sur $\mathbb{R}$
$x \mapsto 1 + \tan^2 x$	$x \mapsto \tan x + c$	sur $]-\frac{\pi}{2} + k\pi\,;\frac{\pi}{2} + k\pi[$, $k \in Z$
$x \mapsto \sqrt{x}$	$x \mapsto \frac{3}{2}x\sqrt{x} + c$	sur $]0\,;+\infty[$
$x \mapsto \frac{1}{x}$	$x \mapsto \ln x$ $x \mapsto \ln(-x)$	sur $]0\,;+\infty[$
$x \mapsto e^x$	$x \mapsto e^x$	sur $\mathbb{R}$

2) Primitives et opérations :

u et v sont des primitives respectives des fonctions u' et v' sur un même intervalle I ; F est une primitive de f.

Fonction f	Fonction F	Condition sur u
$\alpha u'$, α constante	αu	
$u'+v'$	$u+v$	
$u'-v'$	$u-v$	
$u'u^n$, $n \in \mathbb{N}^*$	$\frac{1}{n+1}u^{n+1}$	
$\frac{u'}{u^2}$	$-\frac{1}{u}$	Avec $u(x) \neq 0$ sur I
$\frac{u'}{u^n}$, $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 2$	$-\frac{1}{(n-1)u^{n-1}}$	Avec $u(x) \neq 0$ sur I
$u'\cos(u)$	$\sin(u)$	
$u'\sin(u)$	$-\cos(u)$	
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$	Avec $u(x) > 0$ sur I
$u'\sqrt{u}$	$\frac{2}{3}u\sqrt{u}$	Avec $u(x) > 0$ sur I
$\frac{u'}{u}$	$\ln(u)$	Avec $u(x) > 0$ sur I ou $u(x) < 0$ sur I
$u'e^u$	e^u	
$u'(v' \circ u)$	$v \circ u$	

3) Remarques :

- Dans le tableau 1) la formule 5 peut être remplacée par la formule 3 appliquée avec n entier relatif différent de 0 et de -1.

- De même, dans le tableau 2) la formule 6 peut être remplacée par la formule 4 appliquée avec n entier relatif différent de 0 et de -1

- $u' \times v'$ <u>n'admet pas</u> $u \times v$ pour primitive.

- $\frac{u'}{v'}$ <u>n'admet pas</u> $\frac{u}{v}$ pour primitive

Mais :

- $u \times v$ est primitive de $u'v + uv'$

- $\frac{u}{v}$ est primitive de $\frac{u'v+uv'}{v^2}$.