LES NOMBRES COMPLEXES

I Définition

On admet l'existence d'un nombre réel noté i dont le carré est -1 $i^2 = -1$. On appelle nombre complexe tout nombre qui s'écrit sous la forme x + iy, avec x et y réels. Ces nombres constituent l'ensemble des nombres complexes notés C.
Les règles de calcul dans R s'étendent à C (addition, multiplication…)
Remarque :
Si y = 0, 0*i = 0
x + iy = x, réel
➔ R est contenu dans C
Si x = 0, x + iy = iy → imaginaire pur.

II Ecriture algébrique d'un nombre complexe

Soit z un nombre complexe

1) Propriété

Tout complexe y s'écrit de façon unique sous la forme x + iy, avec x et y réels. – cette écriture est l'écriture algébrique.

x : partie réelle de z : Re(z) = x
y : partie imaginaire de z : Im(z) = y

Conséquences de la propriété :
z = 0 : SSI x = 0 et y = 0
z = z' SSI Re(z) = Re(z') et Im(z) = Im(z')

Exemples :

z	Re(z)	Im(z)
4 + 5i	4	5
3i	0	3
3	3	0
$\sqrt{2}-\frac{1}{7}i$	$\sqrt{2}$	$-\frac{1}{7}$

Exercice : voir cours papier.
$i^0 = 1$
$i^1 = i$
$i^2 = -1$
$i^3 = -i$
$i^4 = 1$
$i^5 = i$
$i^6 = -1$
$i^7 = -i$

$i^{4n} = (i^4)^n = 1$
$i^{4n+1} = (i^4)^n * i^1 = i$
$i^{4n+2} = (i^4)^n * i^2 = -1$
$i^{4n+3} = (i^4)^n * i^3 = -i$

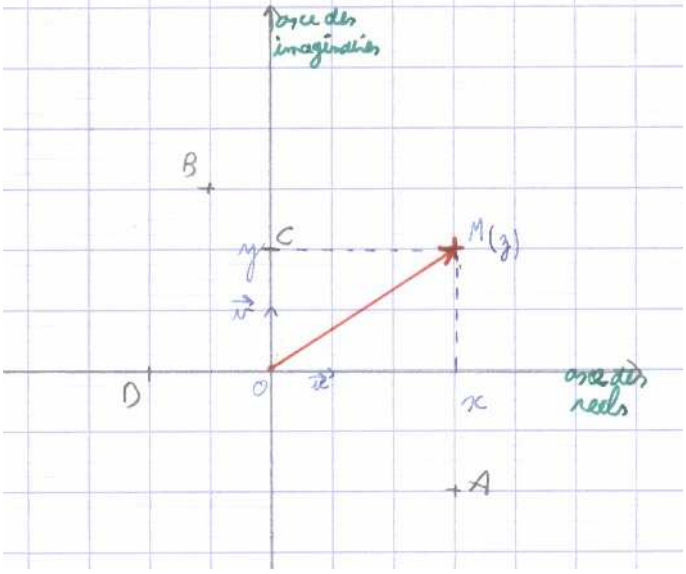
III Aspect géométrique des nombres complexes

1) Plan complexe :

Repère orthonormal : $(O,\vec{u},\vec{v})$ ou $(O,\vec{e_1},\vec{e_2})$

2) Représentation d'un nombre complexe à tout point M (x ; y) on associe le nombre complexe z = x + iy z s'appelle l'affixe du point M (ou l'affixe du vecteur $\overrightarrow{OM}$)

M s'appelle l'image ponctuelle de Z, OM est l'image vectorielle de z.



IV Complexes et opérations

z = x + iy
z' = x'+iy'
x, y, x', y', réels

1) Addition

a) Définition

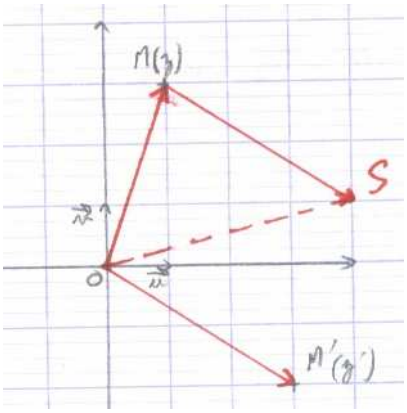
z + z' = (x + x') + i(y + y')

b) Propriétés : celles de l'addition dans R

c) Opposé et soustraction

L'opposé de z est –z = (-x) + i*(-y)
z'-z = z' + (-z) = (x' – x) + i(y' – y)

d) Représentation géométrique de la somme

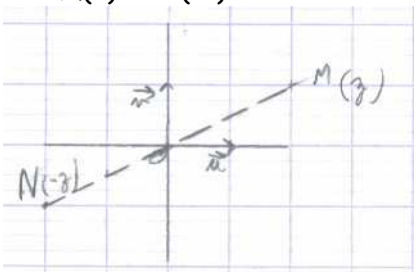


M d'affixe z $\overrightarrow{OM}$ d'affixe z
M' d'affixe z' $\overrightarrow{OM'}$ d'affixe z'
S d'affixe (z + z')
$\overrightarrow{OS}$ d'affixe (z + z')
$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'}$

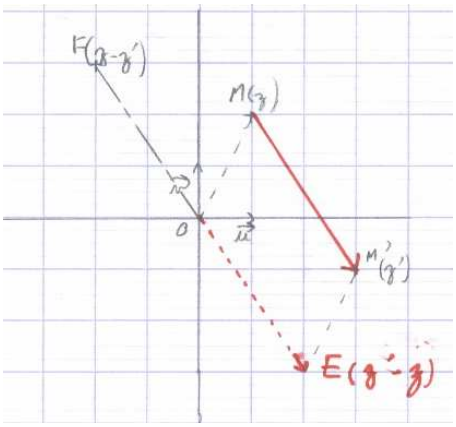
Si M et M' ont pour affixe z et z', alors S d'affixe (z + z') est tel que OMSM' est un parallélogramme.

e) Représentation géométrique de l'opposé

soit M(z) et N(-z) $\overrightarrow{OM} = -\overrightarrow{ON}$



f) représentation géométrique de la différence

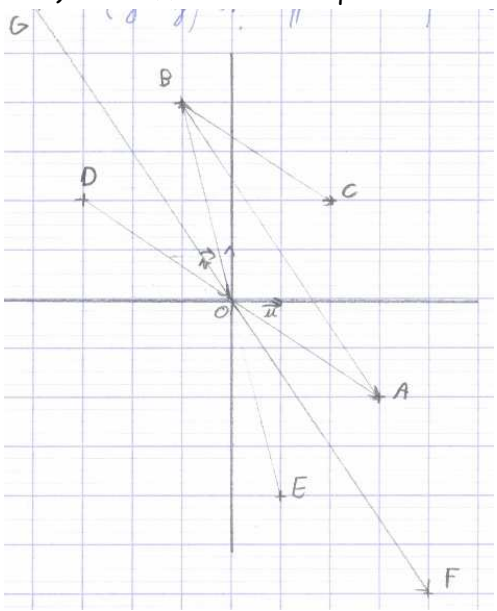


M d'affixe z, $\overrightarrow{OM}$ d'affixe z
M' d'affixe z', $\overrightarrow{OM'}$ d'affixe z'

E d'affixe (z' – z)
$\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM'} + \overrightarrow{MO} = \overrightarrow{MM'}$

Si z et Z' sont les affixes de M et M' alors (z' – z) est l'affixe de E tel que $\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{MM'}$

Exemples :
soit : A(3 – 2i)
B(-1 + 4i)
Placer :
C d'affixe $z_A + z_B$
D d'affixe $-z_A$
E d'affixe $-z_B$
F d'affixe $z_A - z_B$
G d'affixe $z_B - z_A$



2) Multiplication d'un réel par un complexe

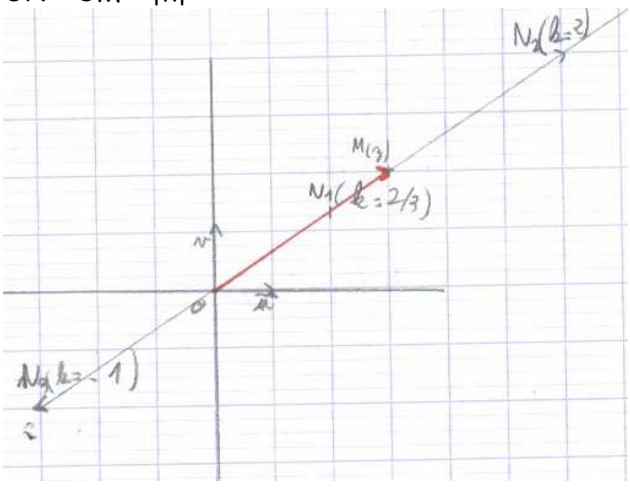
a) définition

Soit k un réel, z un complexe kz = kx + kiy

b) représentation géométrique

Soit M et $\overrightarrow{OM}$ d'affixe z. N et $\overrightarrow{ON}$ d'affixe kz, k réel
$\overrightarrow{ON} = k.\overrightarrow{OM}$
N est l'image de M par l'homothétie de centre O et de rapport k.

O, N, M alignés. $\overrightarrow{ON}$ et $\overrightarrow{OM}$ de même sens si k > 0 ; de sens contraire si k < 0 et confondus ou égaux si k = 1.
Si k = 0, $\overrightarrow{ON} = \vec{0}$
ON = OM * |k|



3) Multiplication de deux complexes

a) définition

$z.z' = (x + iy).(x' + iy')$

$= (x.x' - y.y') + i\,(x.y'+x'.y)$

b) Propriétés : Les mêmes que dans R

c) Inverse d'un complexe non nul

$z \neq 0$

$z = 0$ SSI $x = 0$ et $y = 0$ donc $z \neq 0$ SSI $x \neq 0$ ou $y \neq 0$.

$$\frac{1}{z} = \frac{1\times(x-iy)}{(x+iy)\times(x-iy)}$$

$$\frac{1}{z} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} + \frac{-y}{x^2+y^2}\times i$$

d) quotient de deux complexes

$$\frac{z'}{z} = \frac{(x'+iy')(x-iy)}{(x+iy)(x-iy)}$$

$$\frac{z'}{z} = \frac{x'x+iy'x-x'iy+i^2yy'}{x^2+y^2} = \frac{x'x+yy'+i(xy'-x'y)}{x^2+y^2}$$

$$\frac{z'}{z} = \frac{x'x+yy'}{x^2+y^2} + i\,\frac{xy'-x'y}{x^2+y^2}$$

Exemples : voir cours

V Nombres complexes et conjugués

1) Définition

On appelle conjugué de z, le nombre noté $\bar{z}$.

Tel que :

$Re(\bar{z}) = Re(z)$

$Im(\bar{z}) = -Im(z)$

Si $z = x+ iy$, x et y réels, alors $\bar{z} = x - iy$

2) Propriétés :

a) $\bar{\bar{z}} = z$

b) $z + \bar{z} = 2\,Re(z)$

$z - \bar{z} = 2\,Im(z)$

c) $z = \bar{z}$: y est nul ➔ z est réel

$z + \bar{z} = 0$: z est un imaginaire pur ($\bar{z} = -z$)

d) $z\bar{z} = x^2+y^2$

$z\bar{z}$ est un réel positif

3) Opérations et complexes :

$z = x + iy$, $z' = x'+iy'$, x, x', y, y' réels.

a) Conjugué d'une somme

$$\overline{z+z'} = \bar{z} + \bar{z'}$$

b) Conjugué d'une différence

$$\overline{z-z'} = \bar{z} - \bar{z'}$$

c) Conjugué d'un produit

$$\overline{z.z'} = \bar{z}.\bar{z'}$$

d) Conjugué d'un quotient

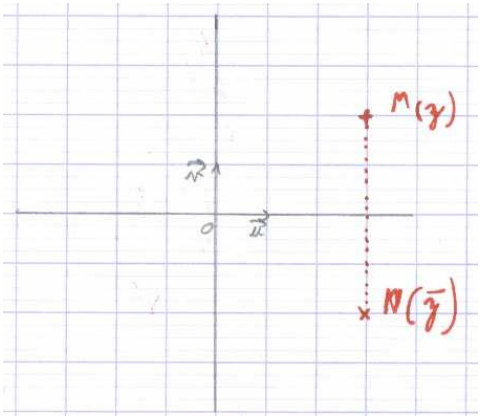
$$\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}} \text{ et } \overline{\left(\frac{z'}{z}\right)} = \frac{\bar{z'}}{\bar{z}}$$

e) Conjugué d'une puissance

$$\overline{z^n} = \left(\overline{z}\right)^n$$

4) représentation graphique

z et $\overline{z}$ sont les affixes de deux points symétriques par rapport à l'axe des réels.



VI Résolution d'équations

Voir cours papier !

VII Recherche d'ensemble de points

Exemple :

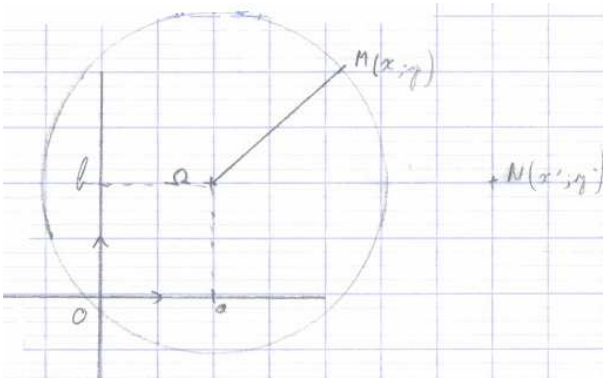
42 p 83

Rappel :

Equation d'un cercle C de centre (a : b) et de rayon r.

$M(x;y) \in C \Rightarrow \Omega M = r$

$\Leftrightarrow \Omega M^2 = r^2$

$\Leftrightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$

d'où équation du cercle : $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$