FONCTION EXPONENTIELLE

I Notion d'équation différentielle

Une équation différentielle est une équation dont l'inconnue est une fonction qui intervient par elle même et ou par ses dérivées successives l'inconnue se note généralement y ou f.

ex : $y' + 3y = 0$; $-y'' + 2y' - 7y = 0$ ➔ sans second membre + coefficients constants

$xy' + 3y' = 7x - 4$; avec second membre + coefficients non constants

Résoudre une équation différentielle est trouver toutes les fonctions solutions.

f est solution de l'équation $-y'' + 2y' - 7y = 0$ signifie que $-f''(x) + 2f'(x) - 7*f(x) = 0$ pour $x \in I$

On va s'intéresser aux équations :

$y' = ky$, k constante

$y' - ky = 0$

Il faut que f soit dérivable sur I.

f est solution de $(y' - ky) = 0$ signifie que :

Pour tout x de I, $f'(x) - k*f(x) = 0$

$f'(x) = k*f(x)$

La variation de f est proportionnelle à f en une valeur de x donnée

II L'équation f' = f avec f(0) = 1

1) Proposition

Si l'équation f' = f avec f(0) = 1 admet une fonction solution, alors cette fonction ne s'annule pas sur R.

Démonstration : soit f dérivable sur R telle que $f'(x) = f(x)$ et $f(0) = 1$.

Soit ϕ telle que $\phi(x) = f(x)*f(-x)$

Si ϕ est dérivable sur R avec

$\phi'(x) = f'(x)*f(x) + f(x)*f'(-x)*(-1)$

$= f(x)*f(-x) - f(x)*f(-x)$ car f' = f

$= 0$

➔ ϕ est constant ; or $\phi(0) = f(0)*f(0) = 1$ car $f(0) = 1$

➔ $\phi(0) = 1$ pour tout x

Supposons qu'il existe $x_0 \in$ R telle que $f(x_0) = 0$

Alors $\phi(x_0) = f(x_0)*f(-x_0) = 0$

Ce qui est contraire au fait que $\phi(x) = 1$ pour tout x.

L'hypothèse est fausse, donc f ne s'annule pas.

2) Théorème :

Il existe une fonction f et une seule qui soit dérivable sur R telle que f' = f et f(0) = 1.

Démonstration :

On admet l'existence de f, on démontre son unicité. Soit f une fonction dérivable sur R telle que f = f' et f(0) = 1 soit g une autre fonction dérivable sur R telle que g' = g et g(0) = 1.

On pose $H(x) = \dfrac{g(x)}{f(x)}$ avec $f(x) \neq 0$

H est dérivable sur R (quotient de fonctions dérivables sur R.

$$H'(x) = \frac{g'(x) \times f(x) - g(x) \times f'(x)}{[f(x)^2]} = 0$$ car f' = f et g' = g

Donc H est constante

H(x) = C pour tout x

$$H(0) = \frac{g(0)}{f(0)} = \frac{1}{1}$$

donc H(x) = 1 pour tout x

donc $\dfrac{g(x)}{f(x)} = 1$ et $g(x) = f(x)$ pour tout x

➔ g = f

3) Définition

La fonction unique solution f' = f avec f(0) = 1 s'appelle le fonction exponentielle f(x) = exp(x)

III Propriété de la fonction exponentielle

1) exp(0) = 1
2) La fonction exp est définie, continue, dérivable sur R avec exp'(x) = exp(x)
3) Propriété caractéristique

Quels que soient les réels a et b, exp(a + b) = exp(a) × exp(b)

Démo :

Voir cours papier

4) Conséquences :

a) pour tout a réel exp(-a) = 1/exp(a)

Demo : voir cours papier

b) quels que soient les réels a, et b

exp(a – b) = exp(a)/exp(b)

c) Quel que soit le réel a, quel que soit l'entier relatif n,

$\exp(na) = [\exp(a)]^n$

d) Quelque soit le réel a, exp(a) > 0

exp(a) = exp(a/2 + a/2)

exp(a) = exp(a/2)*exp(a/2)

$= [\exp(a/2)]^2 > 0$ (car il ne s'annule pas)

CCL :

La fonction exponentielle est la seule fonction dérivable sur R telle que :

f' = f

f(0) = 1

f(a + b) = f(a)*f(b)

IV La notation $\exp(x) = e^x$

1) Définition

On note e le nombre tel que exp(1) = e

2) La notation e^x

$\exp(na) = [\exp(a)]^n$ pour $a \in R$ et $n \in N$.

avec a = 1 , on obtient

$\exp(n) = [\exp(1)]^n = e^n$

On généralise à tout réel x et on obtient :

$\exp(x)] = e^x$

3) Nouvelles propriétés

a) $e^0 = 1$

b) $e^{a+b} = e^a * e^b$

c) $e^{-a} = \frac{1}{e^a}$

d) $e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$

e) $(e^a)^b = e^{a*b}$

f) $e^a > 0$

$\exp(1) = e \approx 2.718$

V Etude de la fonction $x \to \exp(x)$ $(x \to e^x)$

1) exp est défini, continue, dérivable sur R
2) Sens de variation :

exp'(x) = exp(x) et exp(x) > 0 pour tout x donc exp'(x) > 0 pour tout x

La fonction exp est strictement croissante sur R.

Conséquences :

- l'équation $e^x = b$ (avec $b > 0$) admet une solution unique dans R
- $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$ pour tout a et b de R
- $e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$ pour tout a et b de R
- $e^x < 1 \Leftrightarrow x < 0$
- $e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$
- $e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$

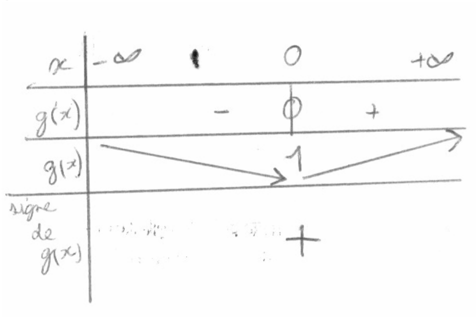
3) Limites

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x$

soit g la fonction définie par : $g(x) = e^x - x$

- variations de g' et signe de g(x)

$g'(x) = e^x - 1$



Pour tout x de R, $g(x) > 0$ $e^x - x > 0$ $e^x > x$

$\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$ ➔ par un théorème de comparaison, on en déduit que

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x$

On pose $t = -x$

$$\lim_{x \to -\infty} t = \lim_{x \to -\infty} (-x) = +\infty$$

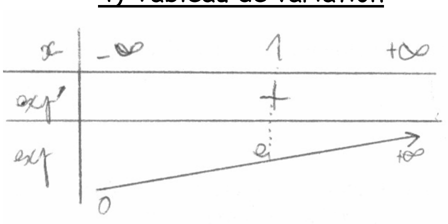
$$e^x = \frac{1}{e^{-x}} = \frac{1}{e^t}$$

$$\lim_{x \to -\infty} e^x = \lim_{t \to +\infty} \frac{1}{t} = 0^+$$

car $\lim\limits_{t \to +\infty} e^t = +\infty$

La courbe admet une asymptote d'équation y = 0 en - ∞ seulement.

<u>4) Tableau de variation</u>



<u>5) Approximation affine au voisinage de 0</u>

$$f(h) = f(0) + f'(0) \times h + h \times \varepsilon(h)$$

avec $\lim\limits_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$

$f(0) + f'(0) \times h$ est l'approximation affine de f au voisinage de 0

exp(0) = 1

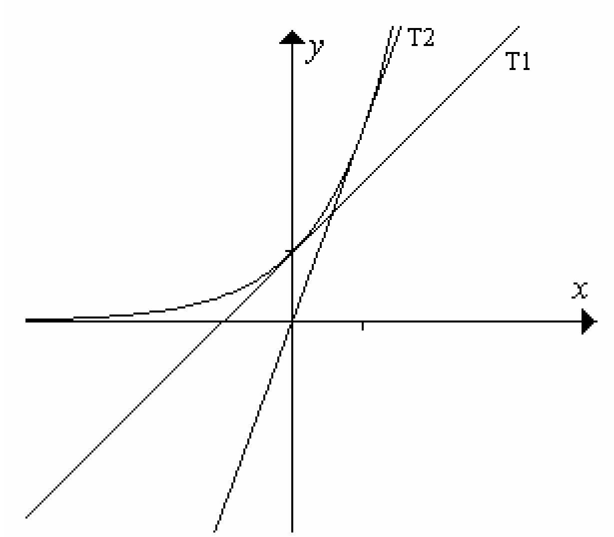
exp'(0) = 1

1 + h est l'approximation affine de l'exponentielle au voisinage de 0

exp(h) ≈ 1 + h au voisinage de 0

Exemples : exp(0.004) ≈ 1.004 ; exp(-0.002) ≈ 0.998

6) Courbe représentative



Méthode d'Euler cf. p 90 + p 95
Equation des tangentes :
T1 à x = 0
T2 à x = 1
T1 : f'(a)*(x - a) + f(a)
y = x + 1

T2 : y = e.x

x	-5	-2	-1	-0.5	0	0.5	1	2	3	5
e^x	$6,7.10^{-3}$	0.1353	0.3978	0.6065	1	1.6487	2.7182	7.389	20.085	148.41

7) Limites à connaître

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} x.e^x = 0$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

+ Voir cours papier

8) Les fonctions :

$x \mapsto \exp(u(x))$

$x \mapsto e^{u(x)}$

a) Limites :

Si $\lim\limits_{x \to a} u(x) = l$, $l \in R$ Alors $\lim\limits_{x \to a} e^{u(x)} = e^l$

Si $\lim\limits_{x \to a} u(x) = +\infty$ Alors $\lim\limits_{x \to a} e^{u(x)} = +\infty$

Si $\lim\limits_{x \to a} u(x) = -\infty$ Alors $\lim\limits_{x \to a} e^{u(x)} = 0$

a réel ou infini.

b) dérivées

$f(x) = e^{u(x)}$

f est dérivable sur tout l'intervalle où u est dérivable avec $f'(x) = u'(x)*e^{u(x)}$ $f = u'*e^u$.

Inversement, une fonction de la forme $u'.e^u$ admet e^u pour primitive sur tout l'intervalle où u est continue (exp est continue sur R).