Fonctions usuelles

Logarithme :

$\ln(x) = \int_1^x \ln(t)dt$

- ln(ab) = ln(a) + ln(b)
- $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$
- $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$
- $\ln\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln(a_k)$
- $\ln\left(a^n\right) = n\ln(a)$

$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty}$ $\boxed{\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty}$ $\boxed{\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1}$

Si f est dérivable en a et f'(a)≠0 alors f^{-1} est dérivable en f(a) et $\left(f^{-1}\right)' f(a) = \frac{1}{f'(a)}$

Avec f strictement monotone et continue

Exponentielle :

exp(x) = y ⇔ x=ln(y) f=ln ; f^{-1} = exp

On sais que : $\boxed{\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}}$ => $\exp'(x) = \left(\ln^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{\ln'(\exp(x))} = \frac{1}{\frac{1}{\exp(x)}} = \exp(x)$

=> **exp'(x) = exp(x)**

exp(a + b) = exp(a) x exp(b)

ln(1) = 0 et exp(0) = 1

$\frac{\exp(a)}{\exp(a)} = \exp(a-b)$

$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty}$ $\boxed{\lim_{x\to-\infty} \exp(x) = 0}$ $\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\exp(x)-1}{x} = 1}$

Pour $n \in \mathbb{N}$ $\exp(n) = \exp(\overbrace{1+1+1+......+1}^{\text{n fois}}) = \overbrace{\underbrace{\exp 1}_{e} \times \underbrace{\exp 1}_{ë} \times ..... \times \underbrace{\exp 1}_{e}}^{\text{n fois}} = e^n$

On prolonge dans $\mathbb{R}$: exp(x) = e^x

Logarithme de base a :

$\log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$ (ln = $\log_e$)

$\left(\log_a(x)\right)' = \frac{1}{x\ln a}$; $\log_a(1) = 0$

$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$

Formule de changement de base

$\log_b(x) = \log_b(a) \times \log_a(x)$

$\log_{\frac{1}{a}} x = -\log_a x$

Exponentielle de base a :

$\exp_a(x) = y \Leftrightarrow x = \log_a(y)$

$\exp_a(x) = e^{x\ln a}$ →

$$\log_a(\exp_a(x)) = x = \frac{\ln(\exp_a(x))}{\ln a}$$

$$x\ln_a = \ln(\exp_a(x))$$

$$e^{x\ln a} = \exp_a(x)$$

$\exp_a'(x) = \ln a.\exp_a(x)$; $\exp_a(0) = 1$ => $e^{0.\ln a} = 1$

$\exp_a(x+y) = \exp_a(x) \times \exp_a(y)$

$$\exp_a(-x) = \frac{1}{\exp_a(x)}$$

$\ln(a^n) = n\ln(a) \Leftrightarrow a^n = e^{n.\ln(a)} = \exp_a(n)$

On prolonge par notation $\exp_a(x) = a^x$

Puissances :

$P_\alpha : x \mapsto x^\alpha$

$x^\alpha = e^{\alpha\ln x}$, fonction indéfiniment dérivable

Dans l'étude de la fonction, il faut distinguer 3 cas :

$\alpha \leq 0$; $0 < \alpha \leq 1$; $\alpha \geq 1$: la forme des courbes change. On regarde aussi la concavité par l'étude des variations de la dérivée (par le signe de la dérivée seconde)

On peut aussi étudier la limite du taux d'accroissement

Comparaison logarithme/exponentielle et puissances

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

On revient à la définition du ln.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^\alpha}{x^\beta} = 0$$

$$\lim_{x\to0^+} (\ln x)^\alpha \times x^\beta = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x^\alpha} = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} |x|^\alpha \times a^x = 0$$

Fonctions hyperboliques

$$sh : x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad ch : x \mapsto \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

ch'(x) = sh(x)   sh'(x) = ch(x)

sh est impaire et ch est paire sh0() = 0 ch(0) = 1

$$\lim_{x\mapsto+\infty} \frac{sh(x)}{x} = +\infty \qquad \lim_{x\mapsto+\infty} \frac{ch(x)}{x} = +\infty$$

ch'(0) = sh(0) = 0

sh'(0) = ch(0) = 1

T : y = x est la tangente de sh en 0

sh(x) > x de 0 à $+\infty$ et sh(x) < x de $-\infty$ à 0.

⇨ position de sh par rapport à sa tangente en 0

$ch^2(x) - sh^2(x) = 1$

$$th(x)=\frac{sh(x)}{ch(x)}=\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} \quad ; \quad th'(x)=1-th^2(x)=\frac{1}{ch^2(x)}$$

Fonctions hyperboliques réciproques

- argsh(x) = y ⇔ x = sh(y) sur $\mathbb{R}$ et $\arg sh'(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
- argch(x) = y ⇔ x = ch(y) /!\ sur $[1;+\infty[$ et $\arg ch'(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
- argth(x) = y ⇔ x = th(x) /!\ sur]1 ; 1[et $\arg th'(x)=\frac{1}{1-x^2}$

Fonctions circulaires directes

sin²(x) + cos²(x) = 1

$$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$$

sin'(x) = cos(x) ; cos'(x) = -sin (x) ; $\tan' x=\frac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x$

Formules trigonométriques :

$$\boxed{\begin{cases}\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b\\ \sin(a+b)=\cos a\sin b+\sin a\cos b\\ \cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b\\ \sin(a-b)=\sin a\cos b-\cos a\sin b\end{cases}}$$

$$\boxed{\tan(a+b)=\frac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\tan b}}$$

$$\boxed{\begin{cases}\cos a\cos b=\frac{1}{2}[\cos(a-b)+\cos(a+b)]\\ \sin a\cos b=\frac{1}{2}[\sin(a-b)+\sin(a+b)]\\ \sin a\sin b=\frac{1}{2}[\cos(a-b)-\cos(a+b)]\end{cases}}$$

$$\boxed{\begin{cases}\cos p+\cos q=2\left[\cos\frac{p-q}{2}\times\cos\frac{p+q}{2}\right]\\ \sin p+\sin q=2\left[\sin\frac{p+q}{2}\times\cos\frac{p-q}{2}\right]\\ \sin p-\sin q=2\left[\cos\frac{p+q}{2}\times\sin\frac{p-q}{2}\right]\\ \cos p-\cos q=-2\left[\sin\frac{p-q}{2}\times\sin\frac{p+q}{2}\right]\end{cases}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\sin 2x=2\sin x\cos x\\ \cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x=1-2\sin^2 x=2\cos^2 x-1\end{array}}$$

et avec $t=\tan\frac{x}{2}$, $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$; $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$; $\tan x=\frac{2t}{1-t^2}$

$\sin(x+\pi)=-\sin x$ $\quad\sin(\pi-x)=\sin x$

$\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos x$ $\quad\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x$

car sin est 2π périodique et impaire et cos est 2π périodique et paire tan est π périodique

$$\cos(\pi+x)=-\cos x$$
$$\cos(\pi-x)=-\cos x$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\sin x$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x$$

$$\cos a=\cos b <=> \begin{cases} a=b[2\pi] \\ a=-b[2\pi] \end{cases}$$
$$\sin a=\sin b <=> \begin{cases} a=b[2\pi] \\ a=\pi-b[2\pi] \end{cases}$$
$$\tan a=\tan b <=> a=b[\pi]$$

Fonctions circulaires réciproques

- arcsin(x) = y ⇔ x = sin(y) $\forall x\in[-1;1], \forall y\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

  $$\boxed{\forall x\in\left]-1;1\right[, \arcsin'(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}$$

  sin(arcsin(x)) = x avec $x\in\left]-1;1\right[$ et arcsin(sin(x)) est définie sur $\mathbb{R}$

- arccos(x) = y ⇔ x = cos(y) $\forall x\in[-1;1], \forall y\in[0;\pi]$

  $$\boxed{\forall x\in[-1;1], \arccos'(x)=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

  cos(arccos(x)) = x avec $x\in[-1;1]$ et arccos(cos(x)) est définie sur $\mathbb{R}$

- arctan(x) = y ⇔ x=tan(y) $\forall x\in\mathbb{R}, \forall y\in\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$

  $$\boxed{\forall x\in\mathbb{R}, \arctan'(x)=\frac{1}{1+x^2}}$$