Géométrie euclidienne du plan

Coordonnées cartésiennes : (x ; y) uniques
Coordonnées polaires : (r ; θ) pas uniques (r ; $\theta + 2k\pi$) ou (-r ; $\theta + \pi + 2k\pi$)
$\overrightarrow{OM} = r\cos\theta \overrightarrow{e_1} + r\sin\theta \overrightarrow{e_2}$

Equation d'une droite

- cartésienne : ax + by = c
- polaire :
  - o $\mathcal{D}$ passe par 0 : $\theta = \alpha + \frac{\pi}{2}\left[\frac{\pi}{2}\right]$
  - o $\mathcal{D}$ ne passe pas par 0 : $r = \frac{c}{R\cos(\theta - \alpha)}$

Equation d'un cercle passant par l'origine

- $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$ (cartésienne)
- polaire : $r = 2R\cos(\theta - \alpha)$

Produit scalaire

$\left(\widehat{\vec{u};\vec{v}}\right) \neq (\vec{u};\vec{v})$

$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos(\widehat{\vec{u};\vec{v}})$

si $\vec{u}.\vec{v} = 0$ alors $\vec{u} \perp \vec{v}$

$\vec{u}.\vec{v} = \mathrm{Re}(\overline{a}b)$ $(\vec{u}(a);\vec{v}(b))$

$$\boxed{\begin{aligned}(\vec{u}+\vec{v})^2 &= \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \|\vec{v}\|^2\\ (\vec{u}-\vec{v})^2 &= \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u}.\vec{v} + \|\vec{v}\|^2\\ (\vec{u}+\vec{v})^2.(\vec{u}-\vec{v})^2 &= \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\end{aligned}}$$

si $\vec{u}(x;y)$ et $\vec{v}(x';y')$ alors $\boxed{\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy'}$

Projection orthogonale sur une droite

M' est le projeté de M sur $\mathcal{D}$: $\boxed{\overrightarrow{AM'} = \left(\frac{\overrightarrow{AM}.\vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}\right).\vec{u}}$

Lignes de niveau

L'ensemble {M tel que $\overrightarrow{AM'}$ est un vecteur constant} est une droite perpendiculaire à $\vec{u}$.

Déterminant

$Det(\vec{u};\vec{v}) = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\sin(\vec{u};\vec{v})$

$\boxed{Det(\vec{u};\vec{v}) = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires}}$

$(\vec{u};\vec{v})$ base de $\mathcal{V} \Leftrightarrow Det(\vec{u};\vec{v}) \neq 0$

Si $(\vec{i};\vec{j})$ est direct : $Det(\vec{i};\vec{j}) = 1$

Si $(\vec{i};\vec{j})$ est indirect : $Det(\vec{i};\vec{j}) = -1$

/!\ La réciproque n'est pas vraie /!\

ABDC est un parallélogramme => $\left|Det(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD})\right| =$ Aire du # ABDC

Distance d'un point à une droite

$C \in \mathscr{P}$ et $\mathscr{D} = (AB)$

$$\boxed{d(C,\mathscr{D}) = \frac{\left|Det(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})\right|}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|}}$$

Et dans $\mathbb{C}$: $Det(\vec{u};\vec{v}) = \mathrm{Im}(\bar{a}b)$

Si $\vec{u}(x;y)$ et $\vec{v}(x';y')$ alors $Det(\vec{u};\vec{v}) = xy' - yx'$ $\boxed{Det(\vec{u};\vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - yx'}$

Droites de $\mathscr{P}$: équation cartésienne

$\boxed{\begin{cases} x = x_0 + \lambda\alpha \\ y = y_0 + \lambda\beta \end{cases}}$ $\vec{u}(\alpha;\beta)$: un vecteur de $\mathscr{D}$; $A(x_0 ; y_0)$: $\lambda \in \mathbb{R}$

Représentation paramétrique

$(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, $(a,b) \neq (0,0)$

M(x ;y) tel que ax+by+c = 0 est une droite de vecteur directeur u(-b ;a)

Avec $(a',b',c') \in \mathbb{R}^3$

$\mathscr{D}$: ax + by + c = 0 et $\mathscr{D}'$: a'x + b'y + c' = 0

$\mathscr{D} // \mathscr{D}' \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} = 0$ $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ confondues $\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que $\begin{cases} a' = \lambda a \\ b' = \lambda b \\ c' = \lambda c \end{cases}$

Orthogonalité

$\mathscr{D}$: ax + by + c = 0

$\vec{n}(a;b)$ est orthogonal) $\mathscr{D}$: $\vec{n}$ est un vecteur normal à $\mathscr{D}$.

Distance

$d(C,\mathscr{D}) = \dfrac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

ax + by + c est une équation normale quand $a^2 + b^2 = 1$

Exemple : $x\cos\theta + y\sin\theta - p = 0$ est une équation normale car $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

Cercles

Equation cartésienne :

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$$

$$x^2 - 2ax + y^2 - 2by + c = 0 \Longleftrightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 = a^2 + b^2 - c$$

/!\ avec $a^2 + b^2 - c > 0$

L'ensemble des M tels que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$ est le cercle de diamètre [AB]

$\begin{cases} x = a + R\cos\theta \\ y = b + R\sin\theta \end{cases}$ Représentation paramétrique d'un cercle de centre A(a ;b) et de rayon R

Intersection d'un cercle $\mathscr{C}$ et d'une droite Δ :

- Si $d(A;\Delta) > R$: $\mathscr{C} \cap \Delta = \varnothing$
- Si $d(A;\Delta) < R$: $\mathscr{C} \cap \Delta$ est formé de 2 points
- Si $d(A;\Delta) = R$: $\mathscr{C} \cap \Delta$ est un singleton, Δ est tangente à $\mathscr{C}$

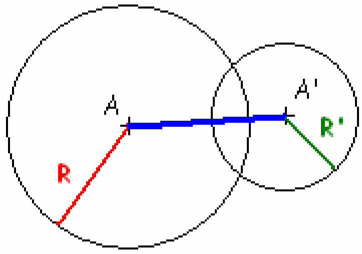
$\mathcal{C}$: $x^2 - 2ax + y^2 - 2by + \gamma = 0$

Avec $a^2 + b^2 - \gamma > 0$

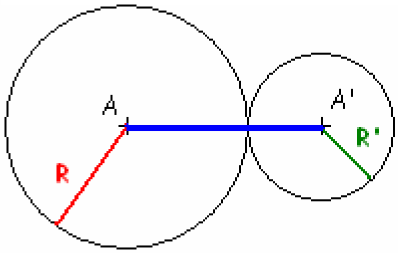
La tangente à $\mathcal{C}$ au point $A(x_0 ; y_0)$ a pour équation :

$\boxed{xx_0 - a(x + x_0) + yy_0 - b(y + y_0) + \gamma = 0}$ Dédoublement des termes

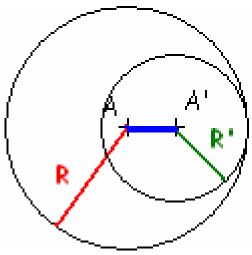
Positions relatives de 2 cercles :



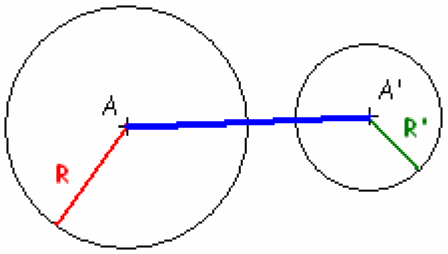
$|R - R'| < AA' < R + R'$



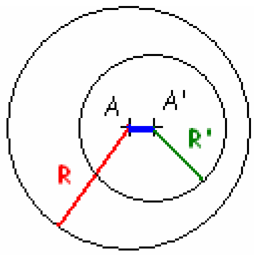
$R + R' = AA'$



$AA' = |R - R'|$



$AA' > R + R'$



$AA' > |R - R'|$