Chapitre 5

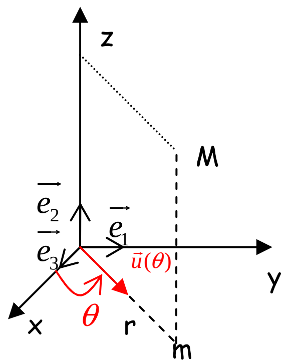
Géométrie 3D

I Modes de repérages

$\mathfrak{R} = (O, \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$

Repère cartésien

Coordonnées cylindriques :



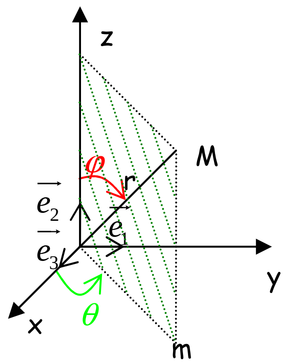
Pas d'unicité des coordonnées.

Si $\vec{u}(\theta) = \cos\theta.\vec{e_1} + \sin\theta.\vec{e_2}$ alors $\overrightarrow{OM} = r.\vec{u}(\theta) + z.\vec{e_3}$

$M \in (O, \vec{e_3})$ → M a pour coordonnées : (0, 0, z) avec θ quelconque

$M(r, \theta, z)$ => $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, z = z

Coordonnées sphériques :



$r = \left\|\overrightarrow{OM}\right\|$; θ est le même qu'en coordonnées cylindriques

φ : angle NON orienté entre $\vec{e_3}$ et $\overrightarrow{OM}$

$0 < \varphi < \pi$ et θ définissent la demi-droite [OM)

$\overrightarrow{OM} = r\sin\varphi\cos\theta\vec{e_1} + r\sin\varphi\sin\theta\vec{e_2} + r\cos\varphi\vec{e_3}$

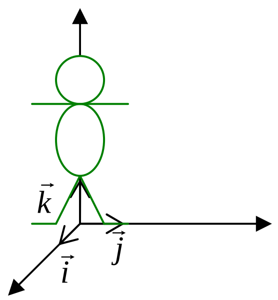
$$OM(r, \theta, \varphi) \Rightarrow \begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\varphi \end{cases}$$

II Produits scalaires

$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}.\vec{v} = 0$ $\quad$ $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos(\widehat{\vec{u}.\vec{v}})$; $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy' + zz'$ (base orthonormale directe)

III Produit vectoriel

Bonhomme d'Ampère :



Main droite sur j regarde i, la tête en k

Si on permute 2 vecteurs, la base change.

Produit vectoriel :

$\vec{u} \wedge \vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\sin\theta.\vec{k}$ $\quad$ $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|$ est l'aire du parallélogramme construit sur $\vec{u}$ et $\vec{v}$

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires → $\vec{u} \wedge \vec{v} = 0$

$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ est une base orthonormée directe

$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}\vec{k}$ $\quad$ Le produit vectoriel n'est pas associatif

IV Déterminant

$Det(\vec{u},\vec{v},\vec{w})=(\vec{u}\wedge\vec{v}).\vec{w}$ /!\ Attention à l'ordre des vecteurs /!\

$$Det(\vec{u},\vec{v},\vec{w})=\begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix}$$

$$Det(\vec{u};\vec{v},\vec{w})=\begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix}x''-\begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix}y''+\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}z''$$

Règle de Sarrus :

$$\begin{array}{ccccc} & & - & - & - \\ x & x' & x'' & x & x' \\ y & y' & y'' & y & y' \\ z & z' & z'' & z & z' \\ & & + & + & + \end{array} = xy'z''+x'y''z+x''yz'-zy'x''-z'y''x-z''yx'$$

Si on échange 2 vecteurs ; le déterminant change pour son opposé. Le déterminant est une application antisymétrique.
Si 2 vecteurs sont égaux, $Det(\vec{u},\vec{v},\vec{w})=0$

$Det(\vec{u},\vec{v},(\vec{w}_1+\vec{w}_2))=Det(\vec{u},\vec{v},\vec{w}_1)+Det(\vec{u},\vec{v},\vec{w}_2)$
$Det(\vec{u},\vec{v},\lambda\vec{w})=Det(\lambda\vec{u},\vec{v},\vec{w})=Det(\vec{u},\lambda\vec{v},\vec{w})=\lambda Det(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$
Si $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires, $Det(\vec{u},\vec{v},\vec{w})=0$
$Det(\vec{u},\vec{v},\vec{w})\neq 0$ ➔ $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ forment une base (directe ou indirecte)
$Det(\vec{u},\vec{v},\vec{w})>0$ ➔ $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ forme une base directe
$Det(\vec{u},\vec{v},\vec{w})<0$ ➔ $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ forme une base indirecte

$|Det(\vec{u},\vec{v},\vec{w})|=\mathcal{V}$: volume du parallélépipède.

V plans de l'espace

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires
$\vec{n}\perp$ à tous vecteurs de $\mathcal{P}$ si $\vec{n}\perp\vec{u}$ et $\vec{n}\perp\vec{v}$
$\mathcal{D}\perp$ à toutes droites de $\mathcal{P}$ si $\mathcal{D}\perp$ 2 droites sécantes de $\mathcal{P}$.

Un plan est définit par : $(A,\vec{u},\vec{v})$; (A,B,C) ; $(\mathcal{D}_1,\mathcal{D}_2)$ sécantes ; $(A,\vec{n})$ $\vec{n}$ vecteur normal

¤ $\overrightarrow{AM}=\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}$

Représentation paramétrique : $\boxed{\begin{cases} x=x_0+\alpha u_1+\beta v_1 \\ y=y_0+\alpha u_2+\beta v_2 \\ z=z_0+\alpha u_3+\beta v_3 \end{cases}}$ avec $\vec{u}(u_1,u_2,u_3)$; $\vec{v}(v_1,v_2,v_3)$; $A(x_0,y_0,z_0)$ et $M(x,y,z)$

¤ $ax+by+cz+d=0$

Plan : vecteur normal $\vec{n}(a,b,c)$ passant par $A\left(\frac{-d}{a},0,0\right)$

$$\begin{pmatrix} x+\frac{d}{a} \\ y \\ z \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}=0$$ ➔ équation du plan

$M \in \mathcal{P} \Leftrightarrow Det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}, \vec{v}) = 0$ donne une équation cartésienne de $\mathcal{P}$.

1) $\mathcal{P} // \mathcal{P}'$ SSI $a' = \lambda a$, $b' = \lambda b$, $c' = \lambda c$

2) $\mathcal{P} = \mathcal{P}'$ SSI $a' = \lambda a$, $b' = \lambda b$, $c' = \lambda c$, $d' = \lambda d$

3) $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sécants → $\mathcal{P} \cap \mathcal{P}'$ est une droite dirigée par $\vec{n} \wedge \vec{n}'$

Ecart angulaire entre $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ = $\widehat{(\vec{n}, \vec{n}')}$

Si $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont normés :

$$\cos\theta = (\vec{n}, \vec{n}') \ \rightarrow \ \theta \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$$

$\mathcal{P} \cap \mathcal{P}' \Leftrightarrow \vec{n} \perp \vec{n}'$

$$d(M, \mathcal{P}) = \frac{|\overrightarrow{AM}.\vec{n}|}{\|\vec{n}\|} = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

VI Droites dans l'espace

Une droite : $\mathcal{D}(A, \vec{u})$; 2 points ; 2 plans sécants

Représentation paramétrique :

$$\mathcal{D}(A, \vec{u}) = \begin{cases} x = x_0 + \alpha u_1 \\ y = y_0 + \alpha u_2 \\ z = z_0 + \alpha u_3 \end{cases}, \ A(x_0, y_0, z_0), \ \vec{u}(u_1, u_2, u_3), \ M(x, y, z)$$

→ Une droite dans l'espace : ax + by + cz + d =0 ; a'x + b'y + c'z + d' = 0

$\mathcal{D}(A, \vec{u})$ $d(M, \mathcal{D}) = \dfrac{\|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$ Aire de AMNP = $\|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}\|$

Perpendiculaires communes :

$\Delta \perp \mathcal{D}$ et $\Delta \perp \mathcal{D}'$ Δ est dirigé par $\vec{u} \wedge \vec{u}'$

VII Sphères :

AM = R (A centre de la sphère $\mathcal{S}$, M sur la sphère)

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$$

Intersection sphère $\mathcal{S}$ et plan $\mathcal{P}$:

Si d(A,$\mathcal{P}$) > R, $\mathcal{S} \cap \mathcal{P}$ est vide.

Si d(A,$\mathcal{P}$) = R, $\mathcal{S} \cap \mathcal{P}$ est un singleton : $\mathcal{P}$ est tangente à $\mathcal{S}$.

Si d(A,$\mathcal{P}$) < R, $\mathcal{S} \cap \mathcal{P}$ est un cercle.

Equation du plan tangente à $\mathcal{S}$ par dédoublement des termes.

$$xx_0 + yy_0 + zz_0 - a(x + x_0) - b(y + y_0) - c(z - z_0) + d = 0$$

Sphère et droite.

2 sphères : $\mathcal{S} \cap \mathcal{S}'$ non nulle SSI : $|R - R'| \leq OO' \leq R + R'$