Chapitre 6

Equations différentielles

Fonction à valeur complexe :

F dans $\mathbb{C}$ et u et v des fonctions dans $\mathbb{R}$

$f(x)=u(x)+iv(x)$; $f'(x)=u'(x)+iv'(x)$; $(\lambda f)'(x)=\lambda f'(x)$; $(fg)'(x)=f'g-g'f$; $\left(\frac{1}{f}\right)'=\frac{-f}{f^2}$

$(f\circ g)'=(f'\circ g).g'$

$e^z=e^xe^{iy}=e^x(\cos y+i\sin y)$; $\left|e^z\right|=e^{\mathrm{Re}(z)}$; $Arg(e^z)=\mathrm{Im}(z)$; avec z = x + iy , $z\in\mathbb{C}$ et $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

$e^{z+z'}=e^z.e^{z'}$; $(e^z)^n=e^{nz}$

Soit $\varphi_a(x)=e^{ax}$: c'est une solution de x' = ax sur $\mathbb{R}$ et φ_a est dérivable sur $\mathbb{R}$

$f'=af$: $f=\lambda\varphi_a$, $\lambda\in\mathbb{C}$

Equation différentielle du premier ordre :

$(E):x'=a(t)x+b(t)$

φ solution de (E) : $\varphi'(t)=a(t).\varphi(t)+b(t)$ résoudre (E) c'est pareil que intégrer (E)

$(E_0):x'=a(t)x$: équation homogène associée à (E)

$$\boxed{S_0=\left\{\begin{array}{l}I\to K\\ t\mapsto\lambda e^{\int_{t_0}^{t}a(u)du}\quad,\ \lambda\in K\end{array}\right\}}$$

Pour tout couple $(t_1,\alpha)\in I\times K$, il existe une seule solution de (E_0) qui vérifie la condition initiale $x(t_1)=\alpha$.

$x(t)=\alpha e^{\int_{t_1}^{t}a(u)du}$ Unicité *: on prend x_1 et x_2 : 2 solutions de (E_0) et on trouve que $x_1 = x_2$.*

$(E):x'=a(t)x+b$

$(E_0):x'=a(t)x$ ψ solution de (E) (c'est <u>une</u> solution)

f est solution de (E) SSI f - ψ est solution de (E_0)

→ f solution de (E) ⇔ $f(t)=\underbrace{\psi(t)}_{\text{Solution particulière de (E)}}+\underbrace{\lambda e^{\int_{t_0}^{t}a(u)du}}_{\text{Solution générale de }(E_0)}$

$$S=\left\{\psi+\lambda e\int_{t_0}^{t}a(u)du \text{ où } \psi \text{ est solution de (E) et } \lambda\in \mathrm{K}\right\}$$

Résolution :

On résoud (E0) puis on détermine une solution de (E)

- Solution évidente de (E)
- Principe de superposition
- Méthode de variation de la constante (cf. physique)

$\lambda=\int\frac{b}{\varphi}$ est une solution de (E)

Rappel : intégration par parties : $\int_0^x u'v=[uv]_0^x-\int_0^x uv'$

$x'=ax+b$ (a et b 2 fonctions de I dans K Il y a une seule solution tel que $x(t_0)=\alpha$

Equation linéaire du second ordre à coefficients constants :

Solution complexes :

Solution aux équations homogènes : de I dans $\mathbb{C}$

L'équation est de la forme : $x''+ax'+bx=c(t)$ c : de I dans K

On forme le polynôme caractéristique. : r² + ar + b = 0

Si $\Delta = 0$: $S_0 \Rightarrow \begin{array}{c} I \to \mathbb{C} \\ t \mapsto (\lambda t+\mu)e^{\alpha t} \end{array}$, $(\lambda,\mu)\in\mathbb{C}^2$

Si $\Delta \neq 0$: $S_0 \Rightarrow \begin{array}{c} I \to \mathbb{C} \\ t \mapsto \lambda e^{\alpha t}+\mu e^{\beta t} \end{array}$ ou α et β sont 2 solutions du polynôme caractéristique.

Théorème : (E_0) admet une solution unique : $f(t_0) = A$ et $f'(t_0) = B$

Solutions réelles :

x'' + ax' + bx = 0

- 1^er cas : r² + ar + b = 0 ; $\Delta = 0$; $t \mapsto (\lambda t+\mu)e^{\alpha t}$
- 2^ème cas : r² + ar + b = 0 ; $\Delta > 0$; r_1, r_2 : $t \mapsto \lambda e^{r_1 t}+\mu e^{r_2 t}$
- 3^ème cas : r² + ar + b = 0 ; $\Delta < 0$; $r_1 = \alpha + i\beta$, $r_2 = \alpha - i\beta$

  $t \mapsto e^{\alpha t}(\lambda\cos\beta t+\mu\sin\beta t)$

  -> (E) : x'' + ax' + b = c et (E_0) : x'' + ax' + bx = 0

(t_0, a ,b) donné : Il existe une unique solution f de (E_0) tel que : f soit réelle et $\begin{cases} f(t_0)=A \\ f'(t_0)=B \end{cases}$

On démontre de la même manière que pour les complexes.

Résolution de l'équation complète :

Soit ψ une solution de (E)

$f : I \to K$ est solution de (E) SSI f- ψ est solution de (E_0)

$S = \{ f = \psi + \varphi \text{ avec } \varphi \in S_0 \}$

-> résoudre l'équation homogène puis trouver une solution particulière de (E)

Principe de superposition :

Si $c = \sum_{k=1}^{n} c_k$ et si $\forall k \in \{1,...,n\}$, φ_k est solution particulière.

Alors $\varphi = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k$ est une solution particulière de (E).

Avec un second membre sous forme de polynôme :

(E) : x'' + ax' + bx = $\mathcal{P}$(t)

P est un polynôme de degré n :

- Si $b \neq 0$: (E) a une solution particulière de degré n
- Si b = 0 et $a \neq 0$: (E) a une solution particulière de degré n+1
- Si b = 0 et a = 0 : (E) a une solution particulière de degré n+2

Avec un second membre sous forme exponentielle et polynôme :

(E) : $x'' + ax' + bx = e^{kt}.\mathcal{P}(t)$ et P(t) de degré n

(Ec) : $r^2 + ar + b = 0$

- Si k n'est pas solution de (Ec) : (E) a une solution de la forme $t \mapsto e^{kt}\mathcal{R}(t)$ avec $\mathcal{R}(t)$ de degré n
- Si k est une racine simple de (Ec) : (E) a une solution de la forme $t \mapsto e^{kt}\mathcal{S}(t)$ avec $\mathcal{S}(t)$ de degré n+1
- Si k est une racine double de (Ec) : (E) a une solution de la forme $t \mapsto e^{kt}\mathcal{U}(t)$ avec $\mathcal{U}(t)$ de degré n+2

Existence et unicité de la solution

Soit φ une solution de (E_0) ne s'annulant pas sur I

$y : I \to K$ tel que $x = \varphi y$

x est une solution de (E) **SSI y' est une solution d'une équation différentielle linéaire du 1er ordre**

→ φy prend la place de x dans (E)

= Méthode de résolution quelque soit c (second membre) c continu sur I

<u>Théorème :</u>

Il existe une solution unique f de (E) tel que : $\begin{cases} f(t_0) = A \\ f'(t_0) = B \end{cases}$