# Les coniques

Foyer F ; Directrice $\mathcal{D}$ ; excentricité e

## I Généralités

Dans $(F,\vec{i},\vec{j})$, $\mathcal{C}$ est la conique qui a pour équation polaire : $r=\dfrac{P}{1+e\cos\theta}$ où P est le paramètre de la conique P = e.d

$\mathcal{D}$ : x = d

Equation cartésienne : $x^2+y^2=e^2(x+d)^2$

## II Parabole

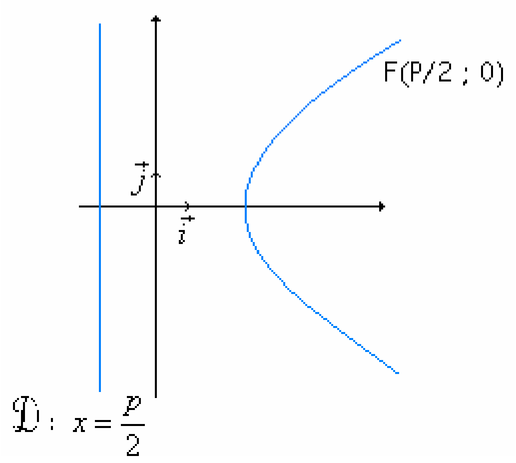
e = 1 $r=\dfrac{d}{1+\cos\theta}$

Equation réduite : $y^2=2px$ $\begin{cases} y=\sqrt{2px} \text{ Si y } \geq 0 \\ y=-\sqrt{2px} \text{ Si y } \leq 0 \end{cases}$

Représentation paramétrique : $\begin{cases} x(t)=\dfrac{pt^2}{2}, t\in\mathbb{R} \\ y(t)=pt \end{cases}$

Tangente à un point M :

$T: yy_0=p(x+y_0)$




## III Ellipse

0 < e < 1

$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ; $c=\sqrt{a^2-b^2}$ ; F(c ; 0) ; $\mathcal{D}: x=\dfrac{a^2}{c}$ ; $e=\dfrac{c}{a}$ ; F'(-c ; 0) ; $\mathcal{D}'$ : $x=\dfrac{-a^2}{c}$

a > b > 0 O est centre de symétrie de $\mathcal{E}$ (Ox) et (Oy) sont axes de symétrie.

Etude limitée sur $\begin{cases} x\geq 0 \\ y\geq 0 \end{cases}$

$y=b\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}}$

Représentation paramétrique : $\begin{cases} x(t)=a\cos t \\ y(t)=b\sin t \end{cases}$ et avec $u=\tan\dfrac{t}{2}$ ; $\cos t=\dfrac{1-u^2}{1+u^2}$ ; $\sin t=\dfrac{2u}{1+u^2}$

$\begin{cases} x(u)=a\dfrac{1-u^2}{1+u^2} \\ y(u)=b\dfrac{2u}{1+u^2} \end{cases}$ représentation rationnelle.

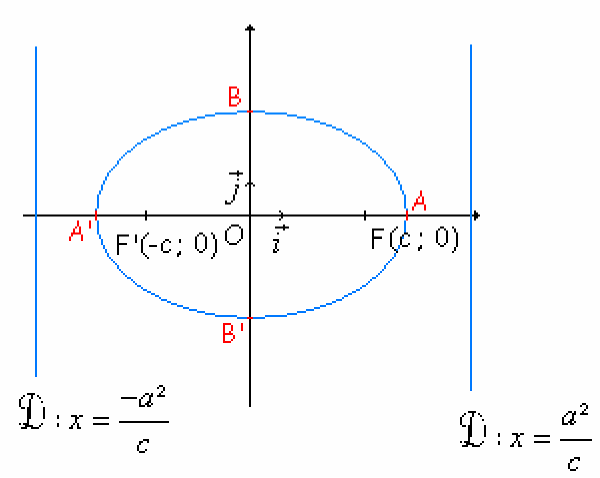
Affinité orthogonale :

$\mathcal{E}: \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ est l'image de $\mathcal{C}$ : x² + y² = a²

par l'affinité de base $(O,\vec{i})$, de rapport $\dfrac{b}{a}$

$\mathcal{C}$ est le cercle principal de l'ellipse.

Tangente à $\mathcal{E}$ en M : $\dfrac{xx_0}{a^2}+\dfrac{yy_0}{b^2}=1$



## IV Hyperbole

E > 1 ; a > 0 ; b > 0

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ ; $c=\sqrt{a^2+b^2}$ ; F(c ; 0) ; $\mathcal{D}: x=\frac{a^2}{c}$ ; $e=\frac{c}{a}$ ; F'(-c ; 0) ; $\mathcal{D}': x=\frac{-a^2}{c}$

O centre de symétrie ; (Ox) et (Oy) sont axes de symétrie.

Asymptotes : $\Delta: y=\frac{b}{a}x$ et $\Delta: y=\frac{-b}{a}x$

Représentation paramétrique : $\begin{cases} x(t)=a\,ch(t) \\ y(t)=b\,sh(t)\end{cases}$ pour $\mathcal{H}_1$ et $\begin{cases} x(t)=-a\,ch(t) \\ y(t)=-b\,sh(t)\end{cases}$ pour $\mathcal{H}_2$

Soit, pour $\mathcal{H}$ : $\begin{cases} x(u)=\frac{a}{2}\left(u+\frac{1}{u}\right) \\ y(u)=\frac{a}{2}\left(u-\frac{1}{u}\right)\end{cases}$

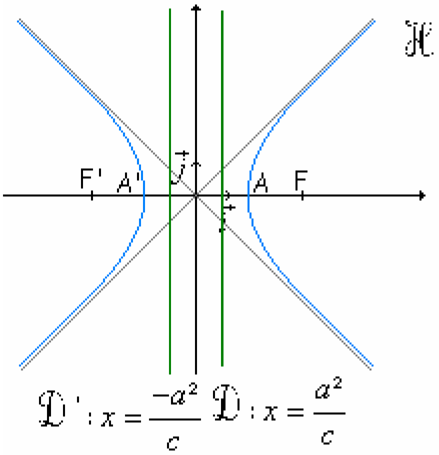
avec $u\in\mathbb{R}^*$ avec $u=\tan\frac{t}{2}$

Tangente à $\mathcal{H}$ en M : $\frac{xx_0}{a^2}-\frac{yy_0}{b^2}=1$

La tangente est le bissectrice de $\widehat{FMF'}$

P et Q : intersection de T et $\Delta$ et de T et $\Delta'$

M milieu de [PQ]




## V Définition bifocale

Soit F et F' et FF' = 2c

➔ |MF – MF'| = 2a est une hyperbole de foyer F et F'

Et soit F et F' et FF' = 2c

➔ MF + MF' = 2a est une ellipse de foyer F et F'

## IV réduction

Dans $R(O,\vec{i},\vec{j})$ : équation complète : $\Gamma: ax^2+2bxy+cy^2+2ux+2vy+w=0$

Equation presque réduite : Il existe un repère $R'(O,\vec{I},\vec{J})$ dans lequel $\Gamma$ a pour équation :

$\Gamma: \lambda X^2+\mu Y^2+2\alpha X+2\beta Y+\gamma=0$ et $\lambda\mu=ac-b^2$ (Discriminant) (Changement de repère)

- Si ac - b² = 0 : $\Gamma$ est du genre parabole ou réunion de 2 droites ou une droite ou $\varnothing$
- Si ac - b² > 0 : $\Gamma$ est du genre ellipse ou singleton ou cercle ou $\varnothing$
- Si ac – b² < 0 : $\Gamma$ est du genre hyperbole ou réunion de 2 droites

Centre de symétrie :

$\Omega$ de coordonnées : ($x_0$ ; $y_0$) tel que : (admis) $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=0 \end{cases}$

Equation de la tangente en M ($x_0$ ; $y_0$)

Dédoublement des termes :

$T: axx_0+bx_0y+bxy_0+cyy_0+u(x+x_0)+v(y+y_0)+w=0$

Remarque : $\overrightarrow{grad\ f}\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y}\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix} ax+by+w \\ bx+cy+v)\end{pmatrix}$ ; $\overrightarrow{grad\ f}_{x_0y_0}=\begin{pmatrix} ax_0+by_0=u \\ bx_0=cy_0=v\end{pmatrix}=2\vec{n}$ (vecteur normal à la tangente.