Chapitre 8

Notion de base

I Elements de logique

p	q	p et q	p ou q	p ➔ q	q ⇔p
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	F	V	V	F
F	F	F	F	V	V

p ➔ q : q : condition nécessaire pour p ; p condition suffisante pour q
(p ➔ q) ⇔ ((non p) ou q)
non (p ➔ q) ⇔ (p et (non q))
(p => q) ⇔ ((non q) ➔ (non p))   *raisonnement par récurrence*
(p ⇔ q) ⇔ ((p ➔ q) et (q ➔ p))

II Ensembles

$\forall$: « pour tout »
$\exists$: « il existe au moins»
$\exists !$: « il existe un unique »
($\forall x \in E, \mathcal{P}$(x)) où $\mathcal{P}$ est une proposition

non ($\forall x \in E, \mathcal{P}$(x)) ⇔ ($\exists\, x \in E$, non $\mathcal{P}$(x))

Parties d'un ensemble : E et F ; E est inclus dans F ou E est une partie de F
SSI $(\forall x \in E, x \in F) \rightarrow E \subset F$

$E\{a,b\}$ $P(E)=\{\{a\},\{b\},\{a,b\},\varnothing\}$

$\varnothing \subset E$ $E \subset E$

$$\begin{cases} E \subset F \\ F \subset G \end{cases} \rightarrow E \subset G$$

$C_E^A=\{x\in E, x \neq A\}$ avec C_E^A le complémentaire de A dans E

$A\cup B=\{x\in E, x\in A \text{ ou } x\in B\}$

$A\cap B=\{x\in E, x\in A \text{ et } x\in B\}$

$A-B=\{x\in E, x\in A \text{ et } x\notin B\}$ $A-B=A\cap \overline{B}$

$A\Delta B=(A/B)\cup(B/A)$

$C_E^{C_E^A}=A$ $C_E^{A\cap B}=C_E^A\bigcup C_E^B$ $C_E^{A\cup B}=C_E^A\bigcap C_E^B$

Produit cartésien :
Soient E et F, 2 ensembles, le produit cartésien de E et F noté E x F est l'ensemble des couples (a, b) avec $a\in E$ et $b\in F$.

Exemple : $E(\alpha,\beta)$ F(1, 4)

$E\times F=\{(\alpha,1),(\alpha,4),(\beta,1),(\beta,4)\}$

$\mathbb{R}^2=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ → E x E = E²

/!\ L'ordre est important ! /!\

III Relations linéaires

Relation linéaire est :

- Réflexive : $\forall x \in E, x\Re x$
- Symétrique : $\forall (x,y) \in E^2, x\Re y \Rightarrow y\Re x$
- Antisymétrique : $\forall (x,y) \in E^2, x\Re y \text{ et } y\Re x \Rightarrow x = y$
- Transitive : $\forall (x,y,z) \in E^3, x\Re y \text{ et } y\Re z \Rightarrow x\Re z$

- Une fonction : de E vers F : $\forall x \in E, \exists \text{ au plus } y \in F, x\Re y$
- Une application : de E dans F : $\forall x \in E, \exists! y \in F, x\Re y$
- Une application est une fonction

*Relation est une relation d'ordre si elle est **réflexive**, **antisymétrique** et **transitive**.*

→ $\prec$ Similaire à $\Re$

$A \prec B \rightarrow A \subset B$

$A \subset B \text{ et } B \subset A \Rightarrow A = B$

$A \subset B \text{ et } B \subset C \Rightarrow A \subset C$

Elément remarquable dans un ensemble ordonné

Dans $(E, \prec)$ un ensemble ordonné $A \subset E$

$x \in E$, x est un majorant de A si et seulement si $\forall a \in A, a \prec x$

(Idem pour minorant)

A est majoré dès qu'on a au moins un majorant (idem minorant)

Soit $\alpha \in E$ et α est un plus grand élément de A dans E SSI $\alpha \in A$ et α est un majorant de A (idem minorant)

On a un seul plus grand élément : Max(A) et Min(A)

$A \subset E$ Si l'ensemble des majorants de A admet un plus petit élément M : M est la borne de A (idem minorant)

$\mathrm{Sup}_E(A)$ et $\mathrm{Inf}_E(A)$

IV Fonction et application

f : injective SSI $\forall (x,y) \in E^2, f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$

f surjective SSI $\forall y \in F, \exists \text{toujours } x \in E, f(x) = y$

f est bijective si on a les 2.

Image directe : $A \subset E$: $f(A) = \{ f(x), x \in A \}$

$y \in (A) \Leftrightarrow \exists x \in A, y = f(x)$

$f(A) \subset F$

Image réciproque : $B \subset F$

$x \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow f(x) = B$

Composition : $g \circ f(x) = g\left(f(x) \right)$

f : E → F bijective : l'application réciproque : f^{-1} : F → E

$f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$

f : E → F : Id_E : identité

Si g et f sont injectives / surjectives / bijectives : $g \circ f$ l'est aussi.

Et $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ *(revenir à h(g(f(x))).*