Chapitre 9

Structures algébriques

I Loi de composition interne (= opération)

Définition :

- Une loi de composition interne (lci) sur un ensemble E est une opération de E x E dans E.
  Exemple : x ; + sont des lci sur $\mathbb{C}$

- Une lci * sur E est **associative** SSI $\forall(x,y,z)\in E^3, x*(y*z)=(x*y)*z$
- Une lci * sur E est **commutative** SSI $\forall(x,y)\in E^2, x*y=y*x$
- E, muni d'une lci* ; $a\in E$;
  - a est **régulier à droite** lorsque : $\forall(x,y)\in E^2 : x*a=y*a \Rightarrow x=y$
  - a est **régulier à gauche** lorsque : $\forall(x,y)\in E^2 : a*x=a*y \Rightarrow x=y$
  - a est régulier quand il est régulier a droite et a gauche

Remarque : Si * est commutative alors a régulier à gauche ⇔ a régulier a droite ⇔ a régulier (On dit aussi a simplifiable).

- E muni d'une lci * $e\in E$
  - E est **neutre à gauche** (**à droite**) par * dans E lorsque : $\forall x\in E, a*x=x \quad (x*e=x)$
  - E est neutre si neutre à droite et neutre à gauche : $e*x=x*e=x$

Proposition :

E muni d'une lci *. Si e est neutre par * dans E, alors e est unique

Démo : e et e' 2 éléments : $\left\{\begin{matrix} e*e'=e \\ e*e'=e' \end{matrix}\right\} \Rightarrow e=e'$

Définition :

E muni d'une lci * : e neutre pour * dans E, $x\in E$

X est symétrisable SSI $\exists y\in E, x*y=y*x=e$

Remarque : l'existence d'un symétrique suppose qu'il y a un élément neutre.

Proposition : E muni d'une lci * associative, e élément neutre $x\in E$; si x est symétrisable alors son symétrique est unique

Démo : *x_1 et x_2, 2 symétriques de x*

$x_1 * x = x_2 * x = e$

$x_1 * x = x_2 * x$

$(x_1 * x) * x_1 = (x_2 * x) * x_1$

$x_1 * (x * x_1) = x_2 * (x * x_1)$ *(associativité)*

$x_1 * e = x_2 * e$

$x_1 = x_2$

Notation : Une lci commutative peut être notée + ; une lci sans info sur sa commutativité peut être notée • (x + y ; x•y ou xy)

Proposition : E muni d'une lci * associative. E l'élément neutre, $x\in E, y\in E$ Si x et y sont symétrisables (x^{-1} ; y^{-1}), alors x * y est symétrisable et $(x * y)^{-1}$) $y^{-1} * x^{-1}$

On démontre dans un sens, puis dans l'autre.

II Groupes

Définition :

- (G,*) est un groupe si * est **associative** ; * **admet un élément neutre** : **tout élément de G est symétrisable**
- (G,*) est un groupe commutatif si * est commutative

On le note (G,+) si il est commutatif, sinon, on le note (G, •)

Proposition :
(G,*) est un groupe, tout élément de G est régulier

Définition :
(G, •) est un groupe H non vide partie de G : H est un sous groupe SSI :

1) H stable par • (→ $\forall (x,y) \in H^2, x \bullet y \in H$)
2) $\forall x \in H, x^{-1} \in H$

Théorème :
Une partie non vide H d'un groupe (G, •) est un sous groupe de (G, •) SSI :
$\forall (x,y) \in H^2, x \bullet y^{-1} \in H$

Corollaire : (G, •) un groupe, e, l'élément neutre de (G, •)
Si H est un sous groupe de (G, •) e est forcément dans H
Si H est un sous groupe de (G, •), (H, •) est un groupe pour •.

Sous groupe propre : différent du groupe et non réduit à e.

Propriété : A et B : 2 sous groupes de (G, •) → $A \cap B$ sous groupe de (G, •)

- f est un morphisme de (G_1, •) dans (G_2,*) quand : $\forall (x,y) \in (G_1)^2 f(x \bullet y) = f(x) * f(y)$
- f est un isomorphisme si f est un morphisme bijectif
- 1 endomorphisme : de (G, •) dans (G, •)
- 1 automorphisme : endomorphisme bijectif

Propriété :
(G_1, •) e_1 neutre ; (G_2,*) e_2 neutre ; f : un morphisme de (G_1, •) dans (G_1, *)

1) f(e_1) = e_2
2) $\forall x \in G_1, f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$
3) Si H_1 est un sous groupe de (G_1, •) →f(H_1) est un sous groupe de (G_2 ,*)
4) Si H_2 est un sous groupe de (G_2, *) → $f^{-1}(H_2)$ est un sous groupe de (G_1, •)

Définition :

1) f(G_1) est un sous groupe de (G_2,*) →on note Im(f) (image de f)
2) $f^{-1}(\{e_2\}) = \{x \in G_1, f(x) = e_2\}$; $f^{-1}(\{e_2\})$ est un sous groupe de G_1 → on note Ker(f) (noyau)

Propriétés :
F est injective SSI ker(f) = {e_1}

III Anneau et corps

- (A,+,x) est un anneau si (A,+) est un groupe commutatif ET x doit être distributive par rapport à + et x associative ; x admet un élément neutre.

- 0_A : élément neutre de + ; 1_A élément neutre de x. symétrique de a, $a \in A$: -a pour +
  symétrique de a, $a \in A$: a^{-1} pour x

- $n \in \mathbb{Z}$: $n \geq 1$: na = a + a + … + a
  0a = 0_A
  n < 0 : na = (-n)(-a)
  $n \geq 1$: a^n = a x a x … x a
  a^0 = 1_A (conversion)

- (A,+,x) un anneau ⇔ $\forall a \in A, 0_A \times a = a \times 0_A = 0_A$ et si $0_A = 1_A$: A est un singleton
- Si Card A > 1 ➔ $0_A \neq 1_A$

- Si $\forall (a,b) \in A^2, (-a)\times b = a \times (-b) = -(a \times b)$
- $-1_A \times a = -a$ (-a) x (-b) = a xb

  a x (b – c) = a x b – a x c

  (b – c) x a = b x a – c x a

Définition : (A, +, x) est un anneau commutatif si x est commutative.

Théorème : (A,+,x) un anneau,

Soient $a \in A$ et $b \in A$ tel que : a x b = b x a

$$\forall n \in \mathbb{N}, (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k \times b^{n-k}$$ **Formule du binôme de Newton**

Démonstration : par récurrence ; a x b = b x a et changement d'indices.

Propriété :

(A,+,x) un anneau $a \in A$; $b \in A$; $n \in \mathbb{N}^*$; a x b = b x a

Corollaire : (A,+,x) un anneau

$$\forall x \in A, \; x^n - 1_A = (x - 1_A)\left(\sum_{k=0}^{n-1} x^k\right) = \left(\sum_{k=0}^{n-1} x^k\right)(x - 1_A)$$

Remarque : Si (x – x_A) est inversible :

$$(x^n - 1_A)(x - 1_A) = \sum_{k=0}^{n-1} x^k$$

Définition : (K,+,x) est un corps si

- (K,+,x) est un anneau commutatif
- Tout élément de K^* = K/{O_k} est inversible pour x

Exemple de corps : $(\mathbb{R}, +, \times)$