# Espace vectoriel

K = $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

## I Structure d'espace vectoriel

***Un espace vectoriel :***

On appelle K-espace vectoriel tout ensemble E muni :

- d'une loi interne + : $\begin{array}{l} E\times E \to E \\ (x,y)\mapsto x+y \end{array}$
- d'une loi externe x : $\begin{array}{l} K\times E \to E \\ (\lambda,x)\mapsto \lambda x \end{array}$

E est un Kev si :

1. (E,+) est un groupe commutatif
2. $\forall(\lambda,\mu)\in K^2, \forall x\in E, (\lambda+\mu)x=\lambda x+\mu x$
3. $\forall\lambda\in K, \forall(x,y)\in E^2, \lambda(x+y)=\lambda x+\lambda y$
4. $\forall(\lambda,\mu)\in K^2, \forall x\in E, \lambda(\mu x)=(\lambda\mu)x$
5. $\forall x\in E, 1x=x$

Remarque : Si K ne change pas, on parle d'espace vectoriel ; On parle de vecteurs dans un Kev et de scalaires dans K.

***Exemple de référence :***

F un Kev (F,+,•)

X un ensemble quelconque

$\mathcal{F}$(X,F) : ensemble des applications de X dans F

$$\left.\begin{array}{l} F\in \mathcal{F}(X,F)\ ;\ g\in \mathcal{F}(X,F) \\ f+g : X\to F \\ \qquad x\mapsto f(x)+g(x) \\ f+g\in \mathcal{F}(X,F) \end{array}\right\} \text{Loi interne dans } \mathcal{F}(X,F)$$

$$\left.\begin{array}{l} \lambda\in K,\ f\in \mathcal{F}(X,F) \\ \lambda f : X\to F \\ \qquad x\mapsto \lambda f(x) \\ \lambda f\in \mathcal{F}(X,F) \end{array}\right\} \text{Loi externe sur K}$$

($\mathcal{F}$(X,F),+,•) est un espace vectoriel

- $\lambda x=0 \Leftrightarrow \lambda=0 \text{ ou } x=0$
- $(\lambda-\mu)x=\lambda x-\mu x$
- $\lambda(x-y)=\lambda x-\lambda y$
- -1x = -x

## II Sous espace vectoriel

F est un sev SSI $F\neq\varnothing$ ; $\forall(x,y)\in F^2, x+y\in F$ (stable par +) ; $\forall(\lambda,x)\in K\times F, \lambda x\in F$ (stable par x)

(E,+, •) est un Kev et F un sev de E, alors F(+,•) est un ev

→ Pour montrer que F est un ev, on montrera qu'il est un sev d'un ev plus grand.

E un K ef. Si F et G dont 2 sev, alors $F\cap G$ est un sev

I un ensemble, à chaque $i \in I$, on associe un ensemble $E_i$, $(E_i)_{i\in I}$ : famille d'ensemble indexée par I

$\bigcap_{i\in I} E_i = \{x, (\forall i \in I, x \in E_i)\}$ et $\bigcup_{i\in I} E_i = \{x, (\exists i \in I, x \in E_i)\}$

$F_i$ sev de E : $\bigcap_{i\in I} E_i$ est un sev

L'intersection de tous les sev de E contenant A est un sev de E contenant A. C'est LE sev engendré par A. On le note Vect(A).

*Remarque :* Vect(a) est le plus petit sev de E contenant A.

## III Application linéaire

E et F 2 Kev ; Une application f de E dans F est linéaire lorsque :

- $\forall (x,y) \in E^2, f(x+y) = f(x) + f(y)$
- $\forall \lambda \in K, \forall x \in E, f(\lambda x) = \lambda f(x)$

- Un **isomorphisme** d'ev est une *application linéaire bijective.*
- Un **endomorphisme** d'ev est une *application linéaire de E dans E.*
- Un **automorphisme** est *un endomorphisme bijectif.*

Une application linéaire de (E,+,x) dans (F,+,•) est un morphisme de groupe de (E,+) dans (F,+).

$\mathcal{L}$(E,F) : ensemble des applications linéaires ; $\mathcal{L}$(E) : ensemble des endomorphismes de E ; Aut(E) : ensemble des automorphismes de E. $Id_E \in Aut(E)$

*Image et Noyau*

E un ev, f(E) est Im(f)

$x \in \ker(f) \Leftrightarrow f(x) = 0$

Si $\ker(f) = \{0_E\}$ alors f est injective

(L(E), + , o) est un anneau

/!\ $(f+g)^2 = f^2 + f \circ g + g \circ f + g^2$

Si f est un isomorphisme de E dans F alors $f^{-1}$ est un isomorphisme de F dans E.

L'ensemble des automorphismes de E muni de la loi o est un groupe noté GL(E) (groupe linéaire)

## IV Somme de 2 EV

¤ $x_1 \in F_1, x_2 \in F_2, \quad x_1 + x_2 \in F_1 + F_2$

¤ $F_1$ et $F_2$ 2 sev de E, $F_1 + F_2$ est un sev de E

*Somme directe :* $F_1 \cap F_2 = \{0\} \rightarrow F_1 \oplus F_2$

La somme $F_1 + F_2$ est directe ⇔ $\forall x \in F_1 + F_2, \exists (x_1, x_2) \in F_1 \times F_2, \quad x = x_1 + x_2$

*Sous espaces supplémentaires :*

$F_1$ et $F_2$ sont supplémentaires lorsque leur somme est directe **ET** $F_1 + F_2 = E$

➔ $E = F_1 \oplus F_2$

***Théorème :*** E et F 2 K ev et $f \in (E,F)$

Im(f) (= f(E)) est isomorphe à tout supplémentaire de ker(f)

## V Projecteur

*Un projecteur :* $p \circ p = p$

$\mathrm{Im}(p) = \{x, p(x) = x\}$

*Une projection :* $p_{A,B}(x) = \left| \begin{array}{l} x \text{ si } x \in A \\ 0 \text{ si } x \in B \end{array} \right.$

P un projecteur : Im(p) = Ker($Id_E$ – p) et $\mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Ker}(p) = E$

Soit p un projecteur, c'est la projection sur Im(p) parallèlement ) Ker(p) => $p_{\mathrm{Im}(p),\mathrm{Ker}(p)}$

## VI symétries

$A \oplus B = E$

$S_{A,B}(x) = \left| \begin{array}{l} x \text{ si } x \in A \\ \text{-}x \text{ si } x \in B \end{array} \right.$

$S_{A,B} \circ S_{A,B} = Id_E$

f est une involution lorsque f o f = $Id_E$

f une involution ⇔ f est la symétrie par rapport à Ker(f – $Id_E$= et parallèlement à Ker(f + $Id_E$)

Relation entre projection et symétrie :

$$\boxed{S_{A,B} = 2p_{A,B} - Id_E}$$