Chapitre 11

Corps des réels $\mathbb{R}$

I Ordre usuel

$(\mathbb{R},+,x)$ est un corps commutatif

L'ordre usuel dans $\mathbb{R}$ est une relation d'ordre totale.

$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2, x\le y$ ou $y\le x$

La relation d'ordre est compatible avec + et avec x.

M est un majorant de A lorsque $\forall x\in A, x\le M$

Si A est majorée, la borne supérieure de A (si elle existe) est le plus petit élément de l'ensemble des majorants de A

On le note Sup A.

$A\subset\mathbb{R}$

$$\alpha=\sup(A)\Leftrightarrow\begin{cases}\forall x\in A, x\le\alpha\\ \forall x\in\mathbb{R},\ \text{Si } x<\alpha \text{ alors x n'est pas un majorant de A}\end{cases}$$

Théorème :

Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure

De la même manière, on définir Inf(A)

II Valeur absolue

$\forall x\in\mathbb{R}$, la valeur absolue de x est le réel $\sup\{-x;x\}$

1) $|-x|=|x|$; $0\le|x|$; $|x|=0\Leftrightarrow x=0$

2) $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$ $|x\times y|=|x|\times|y|$

3) $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$ $|x+y|\le|x|+|y|$ $\big||x|-|y|\big|\le|x+y|$

|x – y| est appelée la distance de x à y.

Soit $a\in\mathbb{R}$ et $\varepsilon>0\Leftrightarrow x\in[a-\varepsilon\ ;\ a+\varepsilon]$

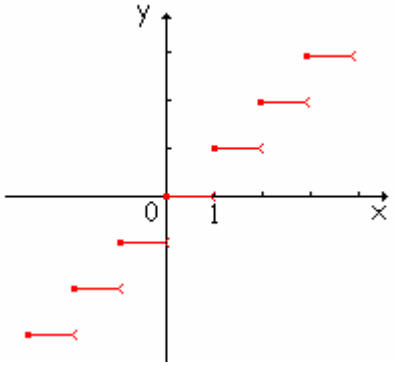
Formules pratiques : $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$ $\sup\{x;y\}=\dfrac{x+y+|y-x|}{2}$ $\inf\{x;y\}=\dfrac{x+y-|y-x|}{2}$

III Partie entière

Soit $x\in\mathbb{R}$, on appelle partie entière de x l'entier E(x) qui vérifie : $E(x)\le x<E(x)+1$

$\forall x\in\mathbb{R}\ \forall p\in\mathbb{Z}$ $x=E(x)\Leftrightarrow x\in\mathbb{Z}$ $E(x+p)=E(x)+p$

E n'est pas injective. E est une application croissante. E n'est pas surjective.



IV Intervalle de $\mathbb{R}$

Définition : Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$

Le segment [a, b] est l'ensemble des réels compris (au sens large (différent de strictement)) entre a et b.

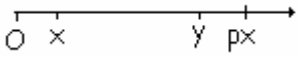
$I \subset \mathbb{C}$; I intervalle de $\mathbb{R} \Leftrightarrow \left(\forall (x,y) \in I^2, \forall t \in [0,1], (1-t)x + ty \in I\right)$

V Rationnels et irrationnels

$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}^* \right\}$ Ensemble des rationnels

$\mathbb{R} / \mathbb{Q}$: Ensemble des irrationnels

Théorème : Le corps $\mathbb{R}$ est archimédien : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^+, \exists p \in \mathbb{N}, y \leq px$



Propriété :

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, Si $x < y$ alors $\exists\, r \in \mathbb{Q}$ tel que $x < r < y$

Entre 2 réels distincts, il existe une infinité de rationnels.

Propriété :

$\forall (x,y) \in \mathbb{Q}^2$ Si x < y alors $\exists\, r \in \mathbb{Q}$ tel que $x < r < y$

Et, entre 2 réels distincts, il existe une infinité d'irrationnels.