Matrices 2

I Changement de bases

Définition :

E un K ev de dimension p > 0

$\mathcal{U} = (e_1, \dots, e_p)$ et $\mathcal{U}' = (e'_1, \dots, e'_p)$ 2 bases de E

La matrice de passage de la base $\mathcal{U}$ à la base $\mathcal{U}'$ est la matrice notée $P_{\mathcal{U}\mathcal{U}'} = \left[P_{ij}\right] \in M_p(K)$

Où $\forall j \in \{1, \dots, p\}$, $e'_j = \sum_{i=1}^{p} P_{ij}\ e_i$

Remarque : les colonnes de $P_{\mathcal{U}\mathcal{U}'}$ sont formées des coordonnées des vecteurs de la nouvelle base ($\mathcal{U}'$) dans l'ancienne base ($\mathcal{U}$).

$$P_{\mathcal{U}\mathcal{U}'} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} e_1 & \dots & e_j \end{array} \\ \begin{pmatrix} P_{11} & \dots & P_{1j} \\ \vdots & & \vdots \\ P_{P1} & \dots & P_{Pj} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} e_1 \\ \vdots \\ e_P \end{array}$$

$P_{\mathcal{U}\mathcal{U}'} = \text{matr}_{\mathcal{U}'\mathcal{U}}\ \text{Id}_E$ Attention à l'ordre !

$P_{\mathcal{U}\mathcal{U}'}$ est inversible et $(P_{\mathcal{U}\mathcal{U}'})^{-1} = P_{\mathcal{U}'\mathcal{U}}$

Formule de changement de bases :

Propriété :

$\mathcal{U} = (e_1, \dots, e_p)$ et $\mathcal{U}' = (e'_1, \dots, e'_p)$ 2 bases de E

Soit $x \in E$, $x = \sum_{i=1}^{p} x_i e_i = \sum_{i=1}^{p} x'_i e'_i$ On note $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ et $X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_p \end{pmatrix}$

$$X = P_{\mathcal{U}\mathcal{U}'}\ X'$$

Changement de matrice d'une application linéaire

Cas particulier : de E dans E, et dans les mêmes bases, on a $M' = P^{-1} MP$ On dit que les matrices M et M' sont semblables.

II Rang d'une matrice

Définition :

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$. On appelle rang de la matrice A, le réel noté rg(A), qui est le rang de la famille des colonnes de A

Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$ $C_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}$ ... $C_p = \begin{pmatrix} a_{1p} \\ \vdots \\ a_{np} \end{pmatrix}$ et $rg(A) = rg(C_1, \dots, C_p)$

rg(f) = rg(A)

$rg(A) \leq \text{Min}(n,p)$

$\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$ $rg(A) = n \Leftrightarrow A$ inversible.

Propriété :

$$A \in \mathcal{M}_{n,p} \quad \begin{cases} \forall P \in GL_p(K)\ ;\ rg(A) = rg(AP) \\ \forall Q \in GL_n(K)\ ;\ rg(QA) = rg(A) \end{cases}$$

III Opérations élémentaires

Soient $(n,p) \in (\mathbb{N}/\{0,1\})^2$, $A \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$ Cj $j^{\text{ème}}$ colonne de A.

On apelle opération élémentaire sur les colonnes de A les transformations suivantes :

1) Echange de 2 colonnes (entre elles) **Ci <-> Cj**

$$P_{jk} = \begin{array}{c} \\ \\ j \\ \\ k \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \qquad\quad j < k \\ \begin{pmatrix} 1 & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & 0 & & 1 & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 & \\ & & & 1 & & 0 & \\ & & & & & & 1 \\ & & & & & & \ddots \\ 0 & & & & & & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

P_{jk} est inversible et $(P_{jk})^{-1} = P_{jk}$ AP_{jk} a pour effet d'échanger les colonnes j et k de A.

2) Remplacement d'une colonne Cj par αCj ($\alpha \in K/\{0\}$) **Cj ← αCj**

$$D_{j,\alpha} = \begin{array}{c} j \\ \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \alpha & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$D_{j,\alpha}$ est inversible et $(D_{j,\alpha})^{-1} = D_{j,\frac{1}{\alpha}}$ $AD_{j,\alpha}$ a pour effet de multiplier la colonne Cj par α.

3) Remplacement d'une colonne Ck par Ck + αCj ($j \neq k$) **Ck ← Ck + αCj**

$$Tj,k,\alpha = \begin{array}{c} \\ \\ \\ j \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} k < j \\ \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & \alpha & 1 & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$T_{j,k,\alpha}$ est inversible et $(T_{j,k,\alpha})^{-1} = T_{j,k,-\alpha}$. $AT_{j,k,\alpha}$ a pour effet de remplacer Ck par Ck + αCj

Les opérations élémentaires sur les colonnes s'obtiennent en multipliant A par P_{jk} , $D_{j,\alpha}$, $T_{j,k,\alpha}$ à DROITE.

On obtient le même travail sur les lignes en multipliant à GAUCHE.

$rg(A) = rg({}^tA)$

Méthode de Gauss :

➔ Détermination du rang d'une matrice

On supprime les lignes/colonnes avec que des 0

On peut échanger les lignes/colonnes

On multiplie C_1 par $1/a_{11}$ C_1 on se retrouve avec un 1 au coin haut/gauche. On étend aux autres colonnes pour trouver que des 0 puis on recommence le travail sur la matrice avec n-1 p-1.

rg(A) = rg(T) $T = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ & & 1 \\ X & & \end{pmatrix}$

Les colonnes de T forment une famille libre. rg(T) = nombre de colonne de T.