Déterminants et systèmes linéaires

I Déterminant d'une famille de vecteur

1) Cas n = 2

Définition :
E un K ev de dimension 2. B = (e_1 ; e_2) une base de E
(u_1 ; u_2) $\in E^2$ $u_1 = x_1 e_1 + x_2 e_2$
$u_é = y_1 e_1 + y_2 e_2$

On appelle déterminant de la famille (u_1 ; u_2) dans la base B, et on note $\det_B(u_1, u_2) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$ le nombre

$\boxed{x_1y_2 - x_2y_1}$

La famille (u,v) est liée Si et seulement Si, $\det_B(u,v) = 0$

➔ (u,v) est libre ⇔ $\det_B(u,v) \neq 0$

2) Cas n = 3

On appelle déterminant de (u,v,w) dans la base B le scalaire :

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = x_1 \begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} - x_2 \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} + x_3 \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

Le déterminant dépend de la base.
Règle de Sarrus, vue au chapitre 5 Géométrie 3D

Det_B (u + t,v,w) = Det_B(u,v,w) + Det_B(t,v,w) etc ...
Det_B est une application alternée.
Si Det_B contient 2 vecteurs égaux, alors le déterminant est égal à 0.
Det_B est antisymétrique - Det_B (u,v,w) = - Det_B (w,v,u)

II déterminant d'une matrice

A $\in M_n(K)$. On appelle déterminant de A et on note det A le déterminant dans la base canonique de la famille des colonnes de A.

$\boxed{\det(A) = \det({}^tA)}$

Propriétés : det(In) = 1
$\det(\alpha A) = \alpha^n \det A$ (attention)
det (AB) = det A x det B
A inversible (A $\in GL_n(K)$) ⇔ det A $\neq 0$
A inversible. $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$

→(u,v,w) liée ⇔ det_B (u,v,w) = 0

III Déterminant d'un endomorphisme

E Kev, B et B' 2 bases de E
On a $\det(matr_B f) = \det(matr_{B'} f)$ ce nombre est le déterminant de l'endomorphisme f.

Avec F une famille de vecteurs de E, B et B' 2 bases de E.
$\det_{B'}(F) = \det_{B'} B \times \det_B(F)$ avec $\det_{B'} B = matr(P_{B'B})$

IV calcul pratique du déterminant

1) développement par rapport à une ligne / colonne

On choisi une ligne ou une colonne : on développe en multipliant chaque terme de cette ligne / colonne par son cofacteur (déterminant d'ordre 2 obtenu en supprimant la ligne et la colonne de ce terme.) E on multiplie par 1 ou -1 selon le tableau suivant :

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

Exemple :

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & 0 & 0 \\ z & h & t \end{vmatrix} = -y\begin{vmatrix} y & z \\ h & t \end{vmatrix} = -y(yt-hz)$$ (On retrouve le développement du cours en appliquant à la première colonne)

2) Utilisation de la trilinéarité

$$\begin{vmatrix} \alpha a_{11}+b_{11} & x & x \\ \alpha a_{21}+b_{21} & x & x \\ \alpha a_{31}+b_{31} & x & x \end{vmatrix} = \alpha\begin{vmatrix} a_{11} & x & x \\ a_{21} & x & x \\ a_{31} & x & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & x & x \\ b_{21} & x & x \\ b_{31} & x & x \end{vmatrix}$$

$$\det(\alpha u+v,w,t) = \alpha\det(u,w,t)+\det(v,w,t)$$

3) Déterminant d'une matrice triangulaire

$$\begin{vmatrix} a_{11} & x & x \\ 0 & a_{22} & x \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}$$ (En particulier, les matrices diagonales)

4) remplacement d'une ligne et d'une colonne

On ne change pas un déterminant en remplaçant une colonne par la somme de celle si et d'une combinaison linéaire des autres.

V Systèmes affines

Système $\mathcal{S}$ d'inconnues (x_1, …x_P) $\in K^p$:

$$\mathcal{S} : \begin{cases} a_{11}x_1+\ldots+a_{1P}x_P = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1+\ldots+a_{nP}x_P = b_n \end{cases}$$

$\mathcal{S}$ est appelé système affine S l'ensemble des solutions de $\mathcal{S}$.

➔Il s'agit de savoir si $S \neq 0$ et d'expliciter les éléments de S.

Interprétation matricielle

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_P \end{pmatrix}$$ S deviens AX = B

(x_1, …,x_P) solutions de $\mathcal{S}$ si et seulement si AX = B

Interprétation vectorielle

x est solution de $\mathcal{S}$ si et seulement si f(x) = b

$$S = f^{-1}(\{b\}) = \{x\in K^p,\ f(x)=b\}$$

Interprétation affine p = 3

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 = b_n \end{cases}$$

S est l'intersection de n plans affines.

Résolution

Le système est dit de Cramer lorsque n = p (A est carrée) et A inversible (det A $\neq$ 0 ; rg(A) = n)

n = 3 :

$$AX = B \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \Leftrightarrow x_1C_1 + x_2C_2 + x_3C_3 = B$$

$$x_1 \det A = x_1 \det(C_1, C_2, C_3) = \det(x_1C_1, C_2, C_3) = \det(B - x_2C_2 - x_3C_3, C_2, C_3) = \det(B, C_2, C_3)$$

et : $\boxed{x_1 = \dfrac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\det(A)}}$ idem pour x_2 et x_3 . Formules analogue pour n = 2

Système homogène

Le système $\mathcal{S}$ est dit homogène lorsque $b_1 = b_2 = \ldots = b_n = 0$

x solution de $\mathcal{S} \Leftrightarrow$ f(x) = 0 donc S = Ker(f)