

Calculs de primitives

On note de la même manière qu'une intégrale, mais on n'écrit pas les bornes :

$$F : I \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \int f(x) dx$$

On note : $\int f(x) dx = \varphi(x) + C(x)$

On généralise dans $\mathbb{C}$

On ne peut pas toujours exprimer les primitives en fonction des fonctions usuelles

Changement de variables :

$f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continu $\varphi : [\alpha; \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ $\underline{C^1}$ sur $[\alpha; \beta]$

$$\varphi([\alpha; \beta]) \subset I \quad \text{on a} \quad \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(u) du \quad \text{pour les intégrales !}$$

On a posé $u = \varphi(x)$

Pour les primitives, on écrit : $\int f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx = \int f(u) du$ avec $u = \varphi(x)$

Exemple :

$$\int \frac{1}{a+x^2} dx = \frac{1}{a} \int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{a}}\right)^2} dx \quad \text{On pose} \quad \frac{x}{\sqrt{a}} = u \quad \text{et} \quad dx = \sqrt{a} du$$

$$\text{d'où : } \frac{\sqrt{a}}{a} \int \frac{1}{1+u^2} du = \frac{1}{\sqrt{a}} \text{Arc tan}(u) + C = \frac{1}{\sqrt{a}} \text{Arc tan}\left(\frac{x}{\sqrt{a}}\right) + C$$

Primitivation par partie :

Si $u, v : I \rightarrow \mathbb{R}$ $\underline{C^1}$ sur I

$$\int u'(x)v(x) dx = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x) dx$$

Exemple :

$$\int \ln(x) dx = \int u'(x)v(x) dx = x \ln x - \int x \times \frac{1}{x} dx = x \ln x - x + C \quad \text{sur } \mathbb{R}_+^*$$

$$u(x) = x ; v(x) = \ln(x)$$

Primitives usuelles :

Fonction f	f(x)	Primitive F	F(x)	Ensemble de validité
$e^{\alpha x}$	$\alpha \in \mathbb{C}^*$	$\frac{1}{\alpha} e^{\alpha x}$		$\mathbb{R}$
ch(x)		sh(x)		$\mathbb{R}$
sh(x)		ch(x)		$\mathbb{R}$
cos(x)		sin(x)		$\mathbb{R}$
sin(x)		-cos(x)		$\mathbb{R}$
th(x)		ln(ch(x))		$\mathbb{R}$
tan(x)		-ln cos(x)		$\mathbb{R} / \left\{ \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{Z} \right\}$

$\frac{1}{ch^2 x} = 1 + th^2 x$	$th(x)$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$\tan(x)$	$\mathbb{R} / \left\{ \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{Z} \right\}$
$x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R} / \mathbb{Z}$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$]0; +\infty[$
$x^n, n \in \mathbb{Z} / \{0; 1\}$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}^*$
$x^n, n \in \mathbb{N}$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$\ln x $	$\mathbb{R}^*$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\text{Arctan}(x)$	$\mathbb{R}^*$
$\frac{1}{1-x^2}$	$\frac{1}{2} \ln \left \frac{1+x}{1-x} \right $	$\mathbb{R} / \{-1; 1\}$
$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\text{Argsh}(x)$	$] -1; 1 [$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\text{Arcsin}(x)$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\varepsilon \text{Argch}(\varepsilon x)$ $\varepsilon = \text{sgn}(x)$	$] -\infty; 1[\cup] 1; +\infty[$

Fonctions rationnelles :

- $\int \frac{1}{(x-a)^n} dx ; a \in \mathbb{C} ; n \in \mathbb{N}$

- o Si $n \in \mathbb{N} / \{0, 1\}, a \in \mathbb{C}$

$$\int \frac{1}{(x-a)^n} dx = -\frac{1}{n-1} \times \frac{1}{(x-a)^{n-1}} + C$$

$$C: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

- Si $a \in \mathbb{R} :$

$$x \mapsto \begin{cases} C_1 & \text{si } x < a \\ C_2 & \text{si } x > a \end{cases}$$

- Si $a \in \mathbb{C} / \mathbb{R} :$

$$C: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$x \mapsto C$$

- o Si $n = 1$ et $a \in \mathbb{R}$

$$C: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\int \frac{1}{(x-a)^n} dx = \ln|x-a| + C \quad \text{avec} \quad x \mapsto \begin{cases} C_1 & \text{si } x < a \\ C_2 & \text{si } x > a \end{cases}$$

- o Si $n = 1$ et $a \in \mathbb{C} / \mathbb{R}$

$$\int \frac{1}{(x-a)^n} dx = \int \frac{1}{(x-a_1) - ia_2} dx = \int \frac{(x-a_1) + ia_2}{(x-a_1)^2 + a_2^2} dx = \underbrace{\int \frac{(x-a_1)}{(x-a_1)^2 + a_2^2} dx + ia_2 \int \frac{1}{(x-a_1)^2 + a_2^2} dx}_{\text{Voir ci dessous}}$$

$$a = a_1 + ia_2, (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$$

- $\int \frac{\lambda x + \mu}{(ax^2 + bx + c)^n} dx \quad (\lambda, \mu, a, b, c) \in \mathbb{R}^5, a \neq 0, n \in \mathbb{N}, \Delta < 0$

1^{ère} étape :

$$I(x) = \frac{\lambda}{2a} \left(\underbrace{\int \frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^n} dx}_{\int \frac{u'}{u^n}} + \int \frac{\frac{2\mu a}{\lambda} - b}{(ax^2+bx+c)^n} dx \right)$$

2^{ème} étape :

On exprime le trinôme sous forme canonique : $ax^2 + bx + c = a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right)$

$$\int \frac{1}{(ax^2 + bx + c)^n} dx = \frac{1}{a} \int \frac{1}{\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}} dx \quad \text{Puis changement de variable } t(x) = \frac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}}$$

Ainsi on se ramène à $\int \frac{dt}{(1+t^2)^n}$

3^{ème} étape :

calcul de $\int \frac{dt}{(1+t^2)^n}$ de proche en proche par partie.

Fonctions rationnelles en sin(x) et cos(x)

$$\int \cos^m x \sin^n x dx$$

→ Si m impaire : changement de variable : $u = \sin(x)$

→ Si n impaire : changement de variable : $u = \cos(x)$

→ Si n est pair et m est pair : on linéarise

$$\cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2} \quad ; \quad \sin x = \frac{2u}{1+u^2} \quad ; \quad dx = \frac{2}{1+u^2} du$$

→ on se ramène à une fonction rationnelle

Règle de Bioche :

$$\omega(x) = R(\sin x, \cos x) dx$$

- Si $\omega(-x) = \omega(x) \rightarrow u = \cos(x)$
- Si $\omega(\pi - x) = \omega(x) \rightarrow u = \sin(x)$
- Si $\omega(\pi + x) = \omega(x) \rightarrow u = \tan(x)$

Raisonnement analogue avec les ch, sh et th

Fonctions rationnelles en x et $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$

$$ad - bc \neq 0 \quad ; \quad \text{On effectue : } u = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$$

Fonctions rationnelles en x et $\sqrt{ax^2+bx+c}$

Cas particulier d'avant (si $a = 0$)

On suppose $a \neq 0$ on écrit le trinôme sous forme canonique $ax^2 + bx + c = a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right)$

- 1^{er} cas : $a > 0$ et $\Delta > 0$:

$$\text{Changement de variable : } \left| x + \frac{b}{2a} \right| = \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \cosh(t), t \geq 0$$

- 2^{ème} cas : $a > 0$ et $\Delta < 0$:

$$\text{Changement de variable : } \left(x + \frac{b}{2a} \right) = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a} \sinh(t)$$

- 3^{ème} cas : $a < 0$ et $\Delta > 0$:

$$\text{Changement de variable : } \left(x + \frac{b}{2a} \right) = \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \sin(t) \quad t \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$$

Exemple : Avec ce qu'on a vu, on calcul la primitive : $I(x) = \int \sqrt{x - x^2} dx$:

$$I(x) = \frac{1}{8} \arcsin(2x-1) + \frac{1}{16} \sin(2 \arcsin(2x-1)) + C \quad \text{On ne savait pas calculer avant.}$$