Chapitre 26

Convexité

Dans tout le chapitre : $f : I \to \mathbb{R}$ I intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide
Et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère du plan

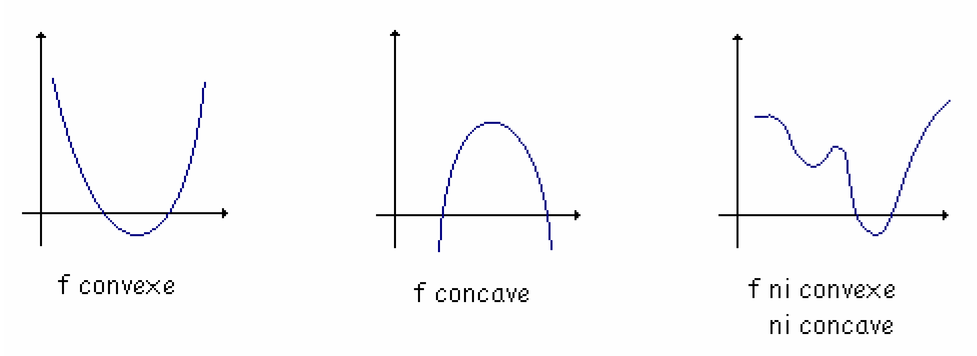
Une partie Γ de $\mathbb{R}^2$ est dite convexe lorsque :
$\forall (A,B) \in \Gamma^2, [AB] \subset \Gamma$

L'épigraphe de f est l'ensemble suivant :

$$\{(x,y) \in I \times R,\ f(x) \le y\}$$

On note Ep(f)

f est convexe si l'épigraphe de f est convexe - idem pour concave.



Propriété : f est convexe SSI

$$\forall (x_1,x_2) \in I^2, \forall \lambda \in [0,1]$$

$$f\left(\lambda x_1 + (1-\lambda x_2)\right) \le \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$

Propriété :
F est convexe SSI $\forall a \in I$

$$p_a : I/\{a\} \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \text{ est croissante}$$

Propriété : Soit f convexe et dérivable sur I et $a \in \overset{o}{I}$

1) $\forall x \in I$, si x < a ➔ $p_a(x) \le f'(a)$
2) $\forall x \in I$, si a < x ➔ $p_a(x) \ge f'(a)$

Théorème : Soit f une fonction dérivable sur I
f est convexe SSI f' est croissante sur I | f est concave SSI f' est décroissante sur I

Ceci correspond à : (f 2 fois dérivable) ; f convexe ⇔ $f'' \ge 0$ sur I | f concave ⇔ $f'' \le 0$ sur I

Exemples :

- $x \mapsto e^x$ *est convexe sur* $\mathbb{R}$
- $x \mapsto \ln(x)$ *est concave sur* $\mathbb{R}_+^*$ $\qquad (\ln x)'' = \dfrac{-1}{x^2} < 0$
- $x \mapsto \sin x$ *est concave sur* $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ $\qquad (\sin x)'' = -\sin x$

Théorème : Soit f dérivable sur I
F est convexe SSI sa courbe représentative est au dessus de toute ses tangentes.