Chapitre 27

Espace vectoriel euclidien

Cadre : les ev sont des $\mathbb{R}$ ev

I Produit scalaire

On appelle Produit scalaire sur E tout application φ de E² dans $\mathbb{R}$ tel que :

1) $\forall (u,v)\in E^2, \varphi(u,v)=\varphi(v,u)$ (φ symétrique)
2) $\forall \lambda\in\mathbb{R}, \forall (u,v,w)\in E^3, \varphi(u,\lambda v+w)=\lambda\varphi(u,v)+\varphi(u,w)$ (linéaire par rapport à la 2^e^ place)
3) $\forall u\in E, \varphi(u,u)\geq 0$
4) $\forall u\in E, \varphi(u,u)=0 \Leftrightarrow u=0$

On note le produit scalaire u.v

E un $\mathbb{R}$ ev muni d'un produit vectoriel, on dit que **E est un espace préhilbertien** réel
Si en plus, *E est de dimension finie*, alors c'est un **espace vectoriel euclidien**

Norme :
$\|x\|=\sqrt{x.x}$

$\|u+v\|^2=\|u\|^2+2u.v+\|v\|^2$
$\|u-v\|^2=\|u\|^2-2u.v+\|v\|^2$
$\|u+v\|^2+\|u-v\|^2=2(\|u\|^2+\|v\|^2)$ (Identité du parallélogramme)
$u.v=\frac{1}{4}(\|u+v\|^2-\|u-v\|^2)$ (Identité de polarisation)

Propriété :

$\|u\|=0 \Leftrightarrow u=0$
$\forall \lambda\in\mathbb{R}, \forall u\in E, \|\lambda u\|=|\lambda|\|u\|$

Théorème : (inégalité de Cauchy Schwartz)

$\forall (u,v)\in E^2, |u.v|\leq\|u\|\times\|v\|$

(Rq : Il y a égalité lorsque la famille (u,v) est liée)

Théorème : (inégalité triangulaire – ou de Minkowski)

$\forall (u,v)\in E^2, \|u+v\|\leq\|u\|+\|v\|$

$\forall (u,v)\in E^2, \forall\lambda\in\mathbb{R}, \|u\|\geq 0, \|\lambda u\|=|\lambda|\|u\|, \|u+v\|\leq\|u\|+\|v\|, \|u\|=0\Leftrightarrow u=0$

L'application $u\mapsto\|u\|=\sqrt{u.u}$ est une norme.

Un vecteur u est dit normé ou unitaire lorsque $\|u\|=1$

On définie l'écart angulaire ainsi : $\theta\in[0,\pi]$ $\cos\theta=\frac{u.v}{\|u\|\|v\|}$

Orthogonalité :
E un ev réel muni d'un produit vectoriel
2 vecteurs sont orthogonaux lorsque u.v = 0

Soit $X \subset E, X \neq \varnothing$

$X^{\perp} = \{y \in E, \forall x \in X, x.y = 0\}$ est appelé l'orthogonal de X.

X une partie non vide de E

$X^{\perp}$ est un sev de E

Propriété :

Pour tout X sev de E

$X \cap X^{\perp} = \{0\}$

Si F est un sev de E alors F et $F^{\perp}$ sont en somme direct.

$A \subset B$ alors $B^{\perp} \subset A^{\perp}$

$A \subset \left(A^{\perp}\right)^{\perp}$ Pour A et B 2 parties non vides de E.

Théorème :

X une partie non vide de E

On a alors $X^{\perp} = (Vect(X))^{\perp}$

Deux parties A et B de E sont <u>orthogonales</u> lorsque $\forall (x, y) \in A \times B, x.y = 0$

Théorème : Soit $u \in E / \{0\}$ $\mathbb{R}u$ désigne la droite vectorielle engendrée par le vecteur u.

On a : $\mathbb{R}u \oplus \{u\}^{\perp} = E$

$\mathbb{R}u$ et l'orthogonal de u sont supplémentaires dans E

E n'est pas forcément de dimension finie.

<u>Théorème de Pythagore</u>

Définition :

Une famille (x_1, …, x_n) de E est orthogonale lorsque $\forall i, x_i \neq 0$: $\forall (i,i) \in [\![1,n]\!]^2, i \neq j \Rightarrow x_i.x_j = 0$

Une famille orthogonale est orthonormale lorsque tous les vecteurs sont normés

$(x_1, \ldots x_n)$ est orthonormale ⇔ $\forall (i,i) \in [\![1,n]\!]^2 \Rightarrow x_i.x_j = \delta_{ij}$ (δ_{ij} : symbole de Kronecker)

Théorème :

1) Soients $(x, y) \in E^2$ $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \Rightarrow x.y = 0$

2) Si $(x_1, \ldots x_n)$ est orthogonale alors : $\left\|\sum_{i=1}^{n} x_i\right\| = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2$

Propriété : Toute famille orthogonale est libre

Espace vectoriel euclidien

Théorème : Soit E un ev euclidien, pour tout sev F de E, on a $F \oplus F^{\perp} = E$

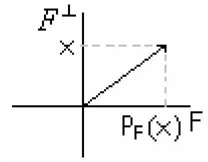
Théorème : Un espace vectoriel euclidien admet toujours une base orthonormale

Corollaire : Tout sev d'un ev euclidien admet une base orthonormale

Projections et involutions

- Projection orthogonale

La projection orthogonale sur F est le projecteur P_F d'image F et de noyau $F^{\perp}$



Rappel : $F \oplus F^{\perp} = E$

Propriété : Si $(e_1,...,e_p)$ est une base orthonormale de F alors $\boxed{\forall x \in E \; ; P_F(x) = \sum_{i=1}^{p} (x.e_i)e_i}$

- Orthogonalisation de Gram - Schmidt

Ce procédé est un algorithme qui permet de construire une base orthonormale a partir d'une base quelconque

Propriété : E un ev euclidien

$\mathcal{B}$ = $(u_1,...,u_n)$ une base de E

Il existe une base orthonormale B ' = $(e_1,...,e_n)$ telle que :

$\boxed{\forall p \in [\![1,n]\!], \mathrm{Vect}(u_1,...,u_n) = \mathrm{Vect}(e_1,...,e_n)}$

- Symétrie orthogonale

Une symétrie s de E euclidien est dite orthogonale lorsque Ker(s – Id_E) et Ker(s + Id_E) sont orthogonaux.

On appelle hyperplan tout sev de E de dimension n-1

On appelle réflexion de E toute symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan.

II Groupe orthogonal de E euclidien

Définition : Un endomorphisme de E est dit orthogonal lorsqu'il conserve le produit scalaire :

$\forall (u,v) \in E^2, f(u).f(v) = u.v$

Propriété : Une application de E dans E qui *conserve le produit scalaire est linéaire.*

Propriété : Un endomorphisme f de E est orthogonal si et seulement si il conserve la norme :

$\forall u \in E, \|f(u)\| = \|u\|$

Propriété : tout endomorphisme orthogonal est un automorphisme

Théorème : L'ensemble des automorphismes orthogonaux de E euclidien est un sous groupe de GL(E), appelé groupe orthogonal de E et noté O(E).

Remarque : Un projecteur orthogonal autre que l'identité n'est pas un endomorphisme orthogonal (il ne conserve pas la norme !). Mais, une symétrie orthogonale est un endomorphisme orthogonal.

Propriété : un endomorphisme f est orthogonal si et seulement si l'image par f d'une base orthonormale est une base orthonormale.

Propriété : Si F est un sev stable par $f \in O(E)$ alors $F^{\perp}$ est stable par f.

Remarque : $f(F^{\perp}) = F^{\perp}$

III Matrices orthogonales

Propriété : E ev euclidien dim E = n et $f \in (E)$

1) f est orthogonale Si et Seulement Si sa patrice M dans une base orthonormale vérifie ${}^tM.M = In$
2) Si $f \in O(E)$ alors $|\det M| = 1$ (n = 2 ou 3) *(réciproque fausse !)*

Propriété :
L'ensemble des endomorphismes orthogonaux tel que det(f)=1 est un sous groupe de O(E) appelé groupe spécial orthogonal de E noté SO(E).

Matrices orthogonales
Définition : Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$f \in L(\mathbb{R}^n)$ tel que matr f = M dans la base canonique. On dit que M est orthogonal lorsque f est orthogonal

L'ensemble des matrices orthogonales est noté $O_n(\mathbb{R})$

Propriété : $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$$M \in O_n(\mathbb{R}) \Leftrightarrow {}^t MM = In$$
$$M \in O_n(\mathbb{R}) \Rightarrow |\det M| = 1$$

Si M est orthogonale, ${}^tM$ est orthogonale.

Propriété : $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
M est orthogonal ⇔ M est une matrice de changement de bases orthogonales.

Propriété : ¤ L'ensemble des matrices orthogonales est un sous groupe de $GL_n(\mathbb{R})$ appelé groupe orthogonal d'ordre n, noté $O_n(\mathbb{R})$

¤ Les matrices $M \in O_n(\mathbb{R})$ telles que det M = 1 est un sous groupe de $O_n(\mathbb{R})$ appelé groupé spécial orthogonal d'ordre n noté $SO_n(\mathbb{R})$

Propriété : $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonal si et seulement si ses vecteurs colonne forment une base orthonormée

IV Orientation de l'espace et produit mixte

Orientation d'ev

Définition : On dit que les bases $\mathcal{U} = (u_1, ..., u_n)$ et $\mathcal{V} = (v_1, ..., v_n)$ de E
sont de même orientation lorsque $\det_{\mathcal{V}}(\mathcal{U}) > 0$

Définition : Orienter l'espace E c'est choisir une base $\mathcal{B}$ et convenir que toutes les bases de même orientation que $\mathcal{B}$ sont directes et que les autres sont indirectes.

Définition : P un plan de E (dim E = 3). E orienté.
Pour orienter P, on choisi un vecteur $w \in P$ et les bases directes de P sont les (u,v) telles que (u,v,w) base directe de E.

Propriété : Si E est un ev euclidien $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ 2 bases orthonormales,
$\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont de même orientation ⇔ $\det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) = \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = 1 \Leftrightarrow P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} \in SO_n(\mathbb{R})$

Produit mixte

Théorème : Soi $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, 2 bases orthonormales directes de E

Alors $\det_{\mathfrak{B}} = \det_{\mathfrak{B}'}$

Définition : Le produit mixte de n vecteurs (n = dim E) est le déterminant dans toute base orthonormale directe.

Produit vectoriel

Théorème : E ev euclidien de dimension n

Soit f une forme linéaire de E, alors il existe $w \in E$ unique tel que $\forall x \in E,\ f(x) = x.w$

Théorème : Dim E) 3 E ev euclidien orienté

Pour tout couple (u,v) de E, il existe un vecteur w unique tel que :

$$\forall x \in E, [u,v,x] = w.x$$

Définition : Le vecteur x tel que $\forall x \in E, [u,v,x] = w.x$ est appelé **produit vectoriel de u et de v** et est noté $u \wedge v$

V Groupe orthogonal dans le plan

$\mathfrak{V}$ un ev euclidien de dimension 2 et orienté.

Définition : Soit $\mathfrak{B}$ une base orthonormale directe, $\theta \in \mathbb{R}$

L'endomorphisme de $\mathfrak{V}$ dont la matrice dans $\mathfrak{B}$ est $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ est appelé rotation d'angle θ

Propriété :

$r_\theta \circ r_\theta = r_{\theta+\theta'}$

Etude des réflexions

Soit $\varphi \in \mathbb{R}$ $S_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}$ $\mathfrak{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ une b.o.n.d de $\mathfrak{V}$

s_φ l'endomorphisme de $\mathfrak{V}$ tel que $\underset{\mathfrak{B}}{\operatorname{matr}} s_\varphi = S_\varphi$

Détermination de $\ker(s_\varphi - Id)$

C'est la droite dirigée par $\vec{u} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\varphi}{2} \\ \sin\frac{\varphi}{2} \end{pmatrix}$

Propriété :

$\mathfrak{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ une b.o.n.d de $\mathfrak{V}$

L'endomorphisme de $\mathfrak{V}$ dont la matrice dans B est $\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}$ est lé réflexion par rapport à la droite de vecteur directeur $\vec{u} = \cos\frac{\varphi}{2}\vec{i} + \sin\frac{\varphi}{2}\vec{j}$

Propriété : Les isométries vectorielles de $\mathfrak{V}$ sont les rotations et les réflexions

Propriété : Toute rotation est la composée de 2 réflexions

VI groupe orthogonal de l'espace

$\mathfrak{W}$ un espace vectoriel euclidien de dimension 3. $\mathfrak{W}$ est orienté

Soit $f \in O(\mathfrak{W})$ $\qquad \mathfrak{B} = (i, j, k)$

$A = \operatorname{matr}_{\mathfrak{B}} f$ donc ${}^tAA = I_3$

$\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\det(f - Id_E) = \det(A - \lambda I_3)$ est un polynôme de degré 3 et de coefficient dominant -1

$\lim_{\lambda \to +\infty} P(\lambda) = -\infty$ et $\lim_{\lambda \to -\infty} P(\lambda) = +\infty$ donc, il existe λ_0 tel que $P(\lambda_0) = 0$

$\det(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow \exists\, x_0 \neq 0,\, f(x_0) = \lambda_0 x_0$

Or $\|f(x_0)\| = \|x_0\| \Rightarrow |\lambda_0|\|x_0\| = \|x_0\| \Rightarrow |\lambda_0| = 1 \Rightarrow \lambda_0 \in \{-1;1\}$

On note $F = \mathbb{R}x_0 \quad I = \dfrac{x_0}{\|x_0\|}$ Et $\dim(F^\perp) = 2$

$f(x_0) = x_0$ ou $f(x_0) = -x_0$

F est stable par f et $f \in O(\mathcal{W})$ donc $F^\perp$ est stable par f/

$\begin{aligned} g : F &\to F^\perp \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$ avec $g \in O(F^\perp)$

<u>1^er^ cas :</u> $\lambda_0 = 1$ <u>et g une rotation</u>

$\mathcal{B}' = (I, J, K)$ une b.o.n.d. de $\mathcal{W}$.

$$\operatorname{matr}_{\mathcal{B}'} f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

f est la rotation d'axe $\vec{\Delta}$ orienté et dirigé par I et d'angle θ. On la note $r_{\vec{\Delta},\theta}$

<u>2^ème^ cas :</u> $\lambda_0 = 1$ <u>et g une réflexion</u>

Il existe (J,K) base de $F^\perp$ tel que $\mathcal{B}' = (I, J, K)$ b.o.n.d. de $\mathcal{W}$.

$$\operatorname{matr}_{(J,K)} g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } \operatorname{matr}_{\mathcal{B}'} f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

f est lé réflexion par rapport à Vect (I,J)

<u>3^ème^ cas :</u> $\lambda_0 = 1$ <u>et g une réflexion</u>

$\exists (J,K)$ b.o.n. de $F^\perp$, $\operatorname{matr}_{(J,K)} g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\operatorname{matr}_{\mathcal{B}'} f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

f est la rotation d'axe Vect(J) et d'angle π. On appelle retournement toute rotation d'angle π

<u>4^ème^ cas :</u> $\lambda_0 = -1$ <u>et g une rotation</u>

(J,K) b.o.n. de $F^\perp$ telle que $\mathcal{B}' = (I, J, K)$ b.o.n. de $\mathcal{W}$.

$$\operatorname{matr}_{\mathcal{B}'} f = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

f est la composée d'une rotation et d'une réflexion par rapport à un plan orthogonal à l'axe de rotation.

Théorème : Classification des endomorphismes orthogonaux de $\mathcal{W}$

Soit $f \in O(\mathcal{W}) / Id_{\mathcal{W}}$

1) si det f = 1 alors f est une rotation
2) Si det f = -1 alors :
    a. F est une réflexion de $\mathcal{W}$

b. F est la composée d'une rotation et d'une réflexion par rapport à un plan orthogonal à l'axe de rotation

Eléments caractéristiques de $f \in O(\mathbb{W})$ *:*

$\Omega \in O_3(\mathbb{R})$ et $f \in O(\mathbb{W})$ tel que $\mathrm{matr}\, f = \Omega$ dans une b.o.n.d.

et $\Omega \neq I_3$

1) $\underline{\det \Omega = 1}$

¤ f est une rotation

¤ Résolution du système $\Omega X = X$ pour déterminer m'axe. Soit I un vecteur directeur, normé, qui oriente l'axe de f

¤ $tr(\Omega) = 1 + 2\cos\theta$ pour déterminer θ

¤ Calcul du déterminant $[x, f(x), I]$ qui est du même signe que $\sin\theta$.

2) $\underline{\det \Omega = -1}$

${}^t\Omega\Omega = I_3 \quad \Omega^2 = I_3 \Leftrightarrow {}^t\Omega = \Omega$

a. Si Ω est symétrique f est une réflexion

Résolution de $\Omega X = X$ pour déterminer le plan de réflexion

b. Si Ω n'est pas symétrique alors $f = r_{\vec{\Delta},\theta} \circ s_P$

Résolution de $\Omega X = -X$ pour déterminer $\vec{\Delta}$

$tr(\Omega) = -1 + 2\cos\theta \to \cos\theta$

$\forall x$ non colinéaire à I

$[x, f(x), I]$ est du même signe que $\sin\theta$.

Remarque : Le plan de la réflexion est $P = \{I\}^\perp$