Chapitre 28

Fonctions de 2 variables

I Normes sur $\mathbb{R}^2$

Définition : E un $\mathbb{R}$ ev, une norme sur E est une application $N : E \to \mathbb{R}$ telle que :

1) $\forall u \in E, \quad N(u) \geq 0$ et $\forall u \in E, \ N(u) = 0 \Rightarrow u = 0$
2) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \ \forall u \in E, \ N(\lambda u) = |\lambda| N(u)$
3) $\forall (u,v) \in E^2 \ N(u+v) \leq N(u) + N(v)$

Définition : E un ensemble. On appelle distance sur E toute application $d : E^2 \to \mathbb{R}$ telle que :

1) $\forall (u,v) \in E^2 \ d(u,v) \geq 0$ et $d(u,v) = 0 \Rightarrow u = v$
2) $\forall (u,v) \in E^2 \ d(u,v) = d(v,u)$
3) $\forall (u,v,w) \in E^3 \ d(u,v) \leq d(u,w) + d(w,v)$

Propriété : d une distance de E

$$\forall (u,v,w) \in E^3 \quad |d(u,v) - d(u,w)| \leq d(v,w)$$

Propriété : (exemple de référence)

$$\| \ \|_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$u = (x,y) \mapsto \|u\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\| \ \|_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$u = (x,y) \mapsto \|u\|_1 = |x| + |y|$$
$$\| \ \|_\infty : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$u = (x,y) \mapsto \|u\|_\infty = \sup(|x|,|y|)$$

$\| \ \|_1$, $\| \ \|_2$ et $\| \ \|_\infty$ sont des normes sur $\mathbb{R}^2$

Propriété : Si (E,N) est un ev normé, alors $\begin{aligned} d : E^2 &\to \mathbb{R} \\ (u,v) &\mapsto |N(u-v)| \end{aligned}$

Equivalence des normes

Propriété : $\forall u \in \mathbb{R}^2$

$\|u\|_\infty \leq \|u\|_1 \qquad \|u\|_1 \leq 2\|u\|_\infty \qquad \|u\|_\infty \leq \|u\|_2 \qquad \|u\|_2 \leq \sqrt{2}\|u\|_\infty \qquad \|u\|_1 \leq \sqrt{2}\|u\|_2 \qquad \|u\|_2 \leq \|u\|_1$

Ouverts de $\mathbb{R}^2$

Définition : dans $\mathbb{R}^2$, d une distance associée à l'une des normes $\| \ \|_1$, $\| \ \|_2$ et $\| \ \|_\infty$. Soit $r > 0$ et $a \in \mathbb{R}^2$. La boule ouverte de centre a et de rayon r est l'ensemble : $\mathcal{B}(a,r) = \{u \in \mathbb{R}^2, d(a,u) < r\}$

Définition : Une partie X de $\mathbb{R}^2$ est un ouvert si elle est la réunion d'une famille de boules ouvertes.

Propriété : $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$; $\mathcal{U}$ est un ouvert SSI $\forall a \in \mathcal{U}, \ \exists \, r > 0, \mathcal{B}(a,r) \subset \mathcal{U}$

II Limite et continuité

1) Limite

Définition : Soit $l \in \mathbb{R}$, on dit que l est limite de f en a lorsque $\forall \varepsilon > 0, \exists r > 0, \forall x \in D, \left(\|x - a\| < r \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon\right)$

Propriété : Si f admet une limite en a alors elle est unique.

2) Continuité

$f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad a \in D$

Propriété :

$$\text{Si } \begin{cases} f \text{ admet une limite en a} \\ \text{et} \\ a \in D \end{cases} \qquad \text{alors } \lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Définition :

f est continue en $a \in D$ lorsque $\lim_{x \to a} f$ existe

f est continue sur $\mathcal{U} \subset D$ lorsque f est continue en tout point de $\mathcal{U}$.

Propriété :

$$D \subset \mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}$$

$$a \mapsto f(a) \mapsto \varphi(a))$$

$$Si \begin{cases} \varphi \text{ est définie et continue sur un} \\ \text{intervalle } J \text{ de } \mathbb{R} \\ f \text{ continue sur } D \\ f(D) \subset J \end{cases} \qquad Alors \{ \varphi \circ f \text{ est continue sur D}$$

Propriété : I intervalle de $\mathbb{R}$, $\psi : I \to \mathbb{R} \quad f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad \psi(I) \subset D$

$I \subset \mathbb{R} \xrightarrow{\psi} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ Si ψ est continue en $c \in I$ et f continue en $a = \psi(c)$ alors $f \circ \psi$ est continu en c.

Propriété : Si f est continue en a alors pour toute suite (x_n) de D

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = a \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} f(x_n) = f(a)$$

Propriété : Si f ne s'annule pas sur D et f est continu en $a \in D$ alors $\frac{1}{f}$ est continu en a.

3) Continuité des applications partielles

$f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Définition : Soit $a = (a_1, a_2) \in D$

Des fonctions définies par $f_{1,a}(x) = f(x, a_2)$; $f_{2,a}(x) = f(a_1, x)$ sont appelées fonctions partielles de f en a.

Propriété : Si f est continue en a alors $f_{1,a}$ est continue en a_1 et $f_{2,a}$ est continue en a_2.

/!\ Attention, réciproque fausse /!\

III Dérivées partielles

1) Dérivées partielles premières

f définie sur un ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^2$, à valeur dans $\mathbb{R}$

$u = (a, b) \in \mathcal{U}$

$\exists\, r > 0,\ \mathcal{B}(u, r) \subset \mathcal{U}$

Définition : Les dérivées des fonctions $f_{1,u}$ en a et $f_{2,u}$ en b lorsqu'elles existent, sont appelées les dérivées partielles de f en u.

On les note : $D_1 f(u)$ ou $\frac{\partial f}{\partial x}(u)$ et $D_2 f(u)$ ou $\frac{\partial f}{\partial y}(u)$

Définition : Si $\dfrac{\partial f}{\partial x}(u)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(u)$ existent en tout point u de $\mathcal{U}$, on défini les fonctions dérivées partielles de f sur $\mathcal{U}$

par : $\begin{aligned}\dfrac{\partial f}{\partial x} : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ u &\mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(u)\end{aligned}$ et $\begin{aligned}\dfrac{\partial f}{\partial y} : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ u &\mapsto \dfrac{\partial f}{\partial y}(u)\end{aligned}$

Définition : On dit que f est C^1 sur $\mathcal{U}$ lorsque les fonctions $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont continues sur $\mathbb{R}$

Définition : $h \neq (0,0)$

On dit que f admet une dérivée en u suivant h lorsque :

$\begin{aligned}f_{u,h} : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto f(u+t.h)\end{aligned}$ est définie au voisinage de 0, et est dérivable en 0.

$\lim\limits_{\substack{t\to 0 \\ t\neq 0}} \dfrac{f(u+t.h)-f(u)}{t}$ est la dérivée de f en u suivant h. On la note (quand elle existe) $D_h f(u)$

2) Etude locale

Théorème : f C^1 sur l'ouvert $\mathcal{U}$, $u=(a,b)\in\mathcal{U}$

$$f(a+h_1,b+h_2) = f(a,b) + h_1\frac{\partial f}{\partial x}(u) + h_2\frac{\partial f}{\partial y}(u) + o\left(\|h\|\right)$$

avec $o\left(\|h\|\right) = \|h\|\varepsilon(h_1,h_2)$ et $\varepsilon(h_1,h_2) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0$

Conséquence : Si f est C^1 alors f est continue.

Gradient en un point :

Définition : Le vecteur $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(u);\dfrac{\partial f}{\partial y}(x)\right)$ est appelé le gradient de f en u

Définition : L'application linéaire $\begin{aligned}\mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ h &\mapsto \mathrm{grad}\left(f(u)\right).h\end{aligned}$ est appelée la différentielle de f en u.

Propriété : $D_h f(u) = \mathrm{grad}\left(f(u)\right).h = \mathrm{d}f_h(u)$: c'est la dérivée de f en u suivant h.

Propriété : f,g C^1 sur $\mathcal{U}$; $\lambda\in\mathbb{R}$, $u\in\mathcal{U}$

$$\mathrm{d}(\lambda f+g)_u = \lambda\mathrm{d}f_u + \mathrm{d}g_u$$

3) Extremum local

Théorème : $f:\mathcal{U}\subset R^2 \to R$, $\mathcal{U}$ ouvert de $\mathbb{R}^2$, f C^1 sur $\mathcal{U}$, $u\in\mathcal{U}$

Si f admet un extremum local en u, alors $\dfrac{\partial f}{\partial x}(u)=0$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(u)=0$

4) Dérivées partielles d'ordre supérieur

Définition : On suppose que f admet une dérivée partielle sur $\mathcal{U}$: $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ avec $j\in\{1,2\}$

Si $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ admet une kème dérivée partielle en a ($k\in\{1,2\}$) On dit que f admet une dérivée (k.j)ème partielle seconde notée $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}(a)$

Théorème de Schwartz :

$f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie sur un ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^2$

Si f admet des dérivées partielles secondes $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ en tout point de $\mathcal{U}$.

Et Si $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ sont continues en $(a,b) \in \mathcal{U}$

Alors $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b)$

IV Intégrale double

1) intégrale sur un pavé

Définition : L'intégrale double sur $P=[a,b]\times[c,d]$ d'une fonction f définie sur P est :

$$\int_P f = \iint_P f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx$$

Théorème de Fubini

$$f : P=[a,b]\times[c,d] \to \mathbb{R}$$

Si f est continue sur P alors $\displaystyle\iint_P f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy$

Propriété :

Si $f(x,y)=g(x)\times h(y)$ alors $\displaystyle\iint_P f(x,y)dxdy = \int_a^b g(x)dx \times \int_c^d h(y)dx$

2) aire plane

Définition : On appelle ***compact élémentaire*** de $\mathbb{R}^2$ une partie Δ de $\mathbb{R}^2$ pouvant être définie de 2 manières :

$\Delta = \{(x,y)\in \mathbb{R}^2 \ ; a \le x \le b$ et $u(x) \le y \le v(x)\}$

$\Delta = \{(x,y)\in \mathbb{R}^2 \ ; c \le y \le d$ et $r(y) \le x \le s(y)\}$

$u,v:[a,b]\to\mathbb{R}$ et $r,s:[c,d]\to\mathbb{R}$ quatre applications continues

Théorème de Fubini

Δ : Compact élémentaire ; f : Continue sur Δ

$$\iint_\Delta f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{u(x)}^{v(x)} f(x,y)dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_{r(x)}^{s(x)} f(x,y)dx \right) dy$$

Propriété :

$$\varphi : C(\Delta,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$

$$f \mapsto \iint_\Delta f(x,y)dxdy$$

φ est une forme linéaire.

3) Changement de variable

Sous certaines conditions :

$$\iint_\Delta f(x,y)dxdy = \iint_\Delta f(x(u,v),y(u,v)) \left| \frac{D(x,y)}{D(u,v)} \right| dudv$$