

Géométrie affine

I Sous espace affines

1) Translation d'un ev

Définition :

Soit $a \in E$, l'application $t_a : E \rightarrow E$ est appelée translation de vecteur a
 $x \mapsto x + a$

On note $\mathcal{T}(E)$ l'ensemble des translations de E

Propriété : $(\mathcal{T}(E), \circ)$ est un groupe commutatif

2) Sous espace affine

Définition : A une partie de E

A est un sous espace affine de E lorsque :

$$A = \emptyset \text{ ou } \exists a \in E \text{ et } F \text{ sev de } E, A = a + F$$

Propriété : $a \in E$, F sev de E

$$a + F = F \Leftrightarrow a \in F$$

Propriété : Soit $a + F$ un se affine de E et $b \in E$

$$b + F = a + F \Leftrightarrow b \in a + F$$

Propriété : F et G deus sev de E

$$a \in E \quad a + F = a + G \Leftrightarrow F = G$$

Définition : Soit $a \in E$, F sev de E

LE se affine $a + F$ est LE se affine passant par a et de direction F

Définition : Une droite, un plan et hyperplan affines sont des sous espaces affines de directions respectives une droite (ev de dimension 1), un plan et un hyperplan.

Propriété : A et B se affines de E non vides de direction F et G .

Si $A \cap B \neq \emptyset$ alors $A \cap B$ est un se affine de direction $F \cap G$

3) point d'un espace vectoriel

On appelle les éléments de E des points, on pose $\forall (x, y) \in E^2, \overrightarrow{xy} = y - x$

Lorsque les éléments de E sont considérés comme des points, on dit que E est muni de sa structure affine.

II Application affine

1) Application affine

Définition : $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ une application

On fixe $A \in \mathcal{A}$ et on définit $\vec{f} : E \rightarrow E$
 $u = \overrightarrow{AM} \mapsto \overrightarrow{f(A)f(M)}$ (une application)

f est dite application affine de $\mathcal{A}$ lorsque $\vec{f}$ est une application linéaire

Propriétés :

1) Si G barycentre de (A, a) (B, b) alors $f(G)$ barycentre de $(f(A), a)$ $(f(B), b)$

2) f est injective $\Leftrightarrow \vec{f}$ injective (idem pour surjective et donc bijective)

3) L'ensemble des applications affines bijectives (noté $GA(\mathcal{A})$) est un groupe pour $\circ$ - on l'appelle le groupe affine.

2) Exemple d'applications affines

(O, e_1, e_2) un repère de $\mathcal{P}$. f une application affine

$$f : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$$

$$M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto M' \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \quad \text{On note } O' = f(O)$$

$$\forall M \in \mathcal{P}, \overrightarrow{O'M'} = \vec{f}(\overrightarrow{OM}) \quad \text{donc } \overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OO'} + \vec{f}(\overrightarrow{OM})$$

$$\text{Si } \text{matr}_{(e_1, e_2)} \vec{f} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \text{ alors } \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \quad \text{où } \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \text{ sont les coordonnées de } O'$$
$$\begin{cases} x' = ax + cy + x_0 \\ y' = bx + dy + y_0 \end{cases}$$

III Isométrie

Définition : $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ est appelée isométrie de $\mathcal{A}$ lorsque f est une application affine qui conserve la distance

1) isométries du plan

Propriété : Soit $f : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ une application affine

$$f \text{ une isométrie de } \mathcal{P} \Leftrightarrow \vec{f} \in O(E)$$

Définition : Soit f une isométrie de $\mathcal{P}$

✕ Si $\det(\vec{f}) = 1$, f est appelée un déplacement

✕ Si $\det(\vec{f}) = -1$, f est appelée un antidéplacement

Définition : $A \in \mathcal{P}$, $\theta \in \mathbb{R}$

On appelle rotation de centre A et d'angle θ et on la note $r_{A, \theta}$, l'isométrie de $\mathcal{P}$ laissant invariant A et de partie

linéaire $\vec{f} = r_{\theta}$

Théorème :

Les déplacements de $\mathcal{P}$ sont les translations et les rotations.

Définition : Soit D une droite de $\mathcal{P}$: on appelle réflexion par rapport à D , et on note ref_D , toute isométrie laissant fixe les points de D et de partie linéaire $\vec{f}$ la symétrie orthogonale par rapport à $\vec{D}$

Propriété : Soit $A, B \in \mathcal{P}$ $A \neq B$

Il existe une unique réflexion transformant A en B

2) Composée de 2 réflexions

Si $D // D'$: Soit $\vec{u} \perp D$ $\text{ref}_{D'} \circ \text{ref}_D = t_{2\vec{u}}$ avec $t_{\vec{u}}(D) = D'$

Si D et D' non parallèles : $\theta = (D, D')[\pi]$ $\text{ref}_{D'} \circ \text{ref}_D = r_{A, 2\theta}$

3) Isométries de l'espace affine

Définition : Soit D un axe de $\mathcal{E}_3$, $\theta \in \mathbb{R}$

On appelle rotation d'axe D d'angle θ et on note $r_{D, \theta}$, l'isométrie affine laissant invariant un point de D et de partie linéaire $r_{\vec{D}, \theta}$.

Théorème : Classification de déplacement de $\mathcal{E}_3$

Les déplacements de $\mathcal{E}_3$ sont les translations, les rotations, les vissages (composée de rotation et de translation)