

Courbes paramétrées (2)

I Courbes en représentation cartésienne

Γ l'arc paramétré par (I, φ) I intervalle de $\mathbb{R}$ $\varphi: I \rightarrow \mathcal{P}$
 $t \mapsto (x(t), y(t))$ et $\varphi \in C^\infty$ sur I

1) Point stationnaire

✕ Si $(x'(t_0), y'(t_0)) \neq (0, 0)$ alors le point $M(t_0)$ est dit régulier et $\vec{U}(x'(t_0), y'(t_0))$ dirige la tangente

✕ Si $(x'(t_0), y'(t_0)) = (0, 0)$ Alors le point $M(t_0)$ est dit stationnaire.

La tangente en $M(t_0)$ est dirigée par $\varphi^{(p)}(t_0) = (x^{(p)}(t_0), y^{(p)}(t_0))$

ou p est le plus petit entier positif tel que $\varphi^{(p)}(t_0) \neq (0, 0)$

Soit $q > p$: le plus petit entier tel que $(\varphi^{(p)}(t_0), \varphi^{(q)}(t_0))$ est une famille libre

p et q sont appelés les entiers caractéristiques de point $M(t_0)$

p impair et q pair : Point ordinaire

p impair et q impaire : Point d'inflexion

p pair et q impair : Point de rebroussement de 1^{ère} espèce

p pair et q pair : Point de rebroussement de 2^{nde} espèce

2) Plan d'étude

a) Détermination des intervalles de définition

b) Réduction du domaine d'étude (*Périodicité, parité, invariance par des isométries simples*)

c) Variations : *Calculer $x'(t)$, $y'(t)$ et rassembler les variations de x et de y dans un même tableau*

d) Etude des branches infinies

e) Etude des points stationnaires (DL)

f) Tracé

g) Précision des points doubles

II Courbes en coordonnées polaires

Définition : La donnée d'une fonction $r: I \rightarrow \mathbb{R}$ et d'une fonction $\theta: I \rightarrow \mathbb{R}$

définit l'axe paramétré $\Gamma: I \rightarrow \mathcal{P}$
 $t \mapsto M(t)$ tel que $\overrightarrow{OM}(t) = r(t) \cos(\theta(t)) \vec{i} + r(t) \sin(\theta(t)) \vec{j}$

Cas particulier fréquent : $\theta(t) = t$

L'axe paramétré à pour équation $r = r(\theta)$

Période et antipériode

Si r est 2π périodique alors $M(\theta + 2\pi) = M(\theta)$ il suffit d'étudier Γ sur un intervalle de longueur 2π

Si $\forall \theta \in D, r(\theta + \pi) = -r(\theta)$ alors $\forall \theta \in D, M(\theta + \pi) = M(\theta)$ il suffit d'étudier Γ sur un intervalle de longueur π

On dit que r est antipériodique.

Principe du secteur angulaire

Si pour $\alpha < \theta < \beta$ $r(\theta)$ de signe constant

Tangente en O

Si $r(\theta_0) = 0$ alors $M(\theta_0) = O$ et la tangente est dirigée par $\vec{u}(\theta_0)$ en O.

Tangente en $M \neq 0$

$$r(\theta_0) \neq 0 \quad \varphi'(\theta_0) = r' \vec{u} + r \vec{u}' \neq 0$$

Branches infinies

Etude des branches infinies, comme dans le chapitre 4

Plan d'étude des courbes en polaire

- a) Détermination des intervalles de définition
- b) Détermination des intervalles d'étude (*antipériode, rotation de centre O*)
- c) Etude des branches infinies
- d) Tableau des signes de $r(\theta)$ et d'annulation de $r(\theta)$ (*variations de r facultatif*)
- e) Tracé : *points particuliers, tangentes, principe du secteur angulaire*
- f) Points double

III Etude métrique des courbes

1) *arc orienté*

2) *abscisse curviligne*

3) *Longueur d'un arc C^1*

4) *Vecteur tangent unitaire*

5) *Repère de Frenet*

6) *Courbure*